UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI SIENA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

SULL'OMISSIONE DI RETICOLI DA PARTE DI VARIETÀ

Relatore:
Chiar.mo Prof. Paolo Aglianò

Tesi di Laurea di:
Mattia Bongini

ANNO ACCADEMICO 2009-2010

Sommario

La primalità del filtro di Mal'cev delle varietà a congruenze modulari è un problema aperto sin dalla pubblicazione del primo studio sistematico sul reticolo dei tipi di interpretabilità delle varietà, dovuto a W. Taylor e O.C. Garcìa. Nella sua tesi di dottorato, L. Sequeira ha dimostrato che il fallimento della primalità di quel filtro non può verificarsi in presenza di termini che sono semplici, in un senso specificato nel suo lavoro, e questo ha fatto sì che si cercassero approcci alternativi per dirimere l'interrogativo.

E' noto dai tempi di R. Dedekind che la modularità di un reticolo è equivalente all'omissione di $\mathcal{N}_5$ dal reticolo stesso, e tale osservazione motiva il nuovo punto di vista assunto: invece di interpellare come di consueto i termini, si ricerca la presenza o meno di alcuni tipi di reticoli all'interno del reticolo delle congruenze delle algebre libere su insiemi di generatori di cardinalità infinita. Il primo risultato presentato riguarda la fondatezza di questo approccio: la famiglia delle classi di equivalenza di varietà che omettono un reticolo sottodirettamente irriducibile è un filtro nel reticolo dei tipi di interpretabilità.

Il secondo risultato persegue, attraverso un contributo di W.D. Neumann, l'obiettivo di ricollocare la problematica della determinazione della primalità dei filtri ottenuti con il risultato precedente, all'interno di un ambiente diverso e, probabilmente, più affine al nuovo approccio sviluppato: il reticolo dei sottouniversi del reticolo delle equivalenze di un insieme.

Indice

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Preliminari

Uno dei più ragguardevoli contributi di A.I. Mal'cev è quello di aver saputo legare la permutabilità delle congruenze delle algebre di una varietà alla presenza di un particolare termine che soddisfa precise equazioni, [9]. Questo risultato ha aperto nuovi orizzonti in Algebra Universale perché ha dimostrato come sia possibile trasformare i problemi relativi alle congruenze in altri relativi alla presenza o meno di termini con determinati comportamenti: la verifica della validità di una proprietà delle congruenze delle algebre di una varietà si traduce nella ricerca di un insieme di termini particolari, perseguibile tramite la manipolazione di termini della varietà. Questo approccio è stato talmente rivoluzionario che ha indirizzato gli sforzi di molti matematici, come A.F. Pixley, [13], B. Jònsson, [8], e A. Day, [3], alla ricerca di altre proprietà delle congruenze traducibili in condizioni sui termini, ottenendo importanti risultati che permettono una facile verifica della soddisfazione o meno di queste proprietà da parte delle congruenze delle algebre di una varietà.

Questa serie di contributi ha portato allo sviluppo del concetto di reticolo dei tipi di interpretabilità delle varietà da parte di W.D. Neumann [12]; tale struttura è l'ambiente ideale per lo studio delle proprietà delle condizioni di Mal'cev, soprattutto per quanto riguarda la determinazione di quali tra queste condizioni siano equivalenti, ma anche per altri aspetti che sorgono proprio una volta che si conduce la ricerca sulla problematica su questo terreno. W. Taylor e O.C. Garcìa sono gli autori del principale lavoro estensivo sull'argomento, [6]; in esso, particolare enfasi è rivolta alla primalità dei filtri di Mal'cev, filtri del reticolo dei tipi di interpretabilità associati naturalmente ad una condizione di Mal'cev. E' qui che essi congetturarono che il filtro delle varietà a congruenze modulari fosse primo, riponendo le loro speranze nella semplicità delle equazioni della condizione di Mal'cev relativa alla modularità, e quindi nella facilità di trovare una dimostrazione sintattica (i.e., tramite manipolazione di termini) di questo fatto.

Tale congettura è ancora oggi irrisolta, e tuttavia la motivazione della speranza di Taylor e Garcìa non sembra più così solida: lo stesso argomento veniva utilizzato per supportare la congettura sulla primalità del filtro delle varietà a congruenze permutabili, presentata in coppia con la precedente, e tuttavia la dimostrazione di Tschantz della correttezza di tale congettura, [18], portata avanti per via sintattica, è ben lontana anche solo dall'essere estendibile all'analoga questione sulla n-permutabilità, a causa dell'eccessiva complessità del ragionamento. Inoltre, nella sua tesi di dottorato, [14], L. Sequeira ha dimostrato come una confutazione della congettura per via sintattica non si possa testimoniare attraverso termini semplici, sollevando l'interrogativo se la questione sia affrontata dal punto di vista ottimale. Il contributo di Sequeira non finisce qui, tuttavia: egli ha anche dimostrato l'affinità del filtro delle varietà a congruenze modulari con altri filtri di Mal'cev primi e la sua distanza da altri non primi, esibendo una condizione presente nei primi ma non nei secondi, e inoltre presente nel filtro delle varietà a congruenze modulari: l'ottimismo di Taylor e Garcìa è, ad oggi, largamente condiviso.

Tornando alla questione del miglior terreno su cui portare avanti la ricerca sulla problematica, la principale difficoltà di una dimostrazione per via sintattica sembra risieda nella "forza" delle equazioni (intesa come capacità di non essere soddisfatta da una varietà) con cui ha a che fare: nel caso di equazioni molto forti (e.g., la distributività, vedi ancora [6]) o molto deboli (e.g., W. Taylor, [17]) tale strada sembra fruttuosa, ma nel caso di equazioni di "media" forza (come la permutabilità e la modularità) le difficoltà aumentano enormemente.

Che la modularità di un reticolo sia equivalente all'omissione da parte del reticolo stesso di $\mathcal{N}_5$, è un contributo dovuto a Dedekind, [4]. Questo risultato rende lecita la domanda se un approccio sviluppato nel senso dell'omissione di reticoli sia più o meno efficace di quello usuale per via sintattica. Non si conoscono risultati che certifichino la sterilità di una riformulazione del problema in questo senso, né, addirittura, tentativi precedenti. E' dunque necessario sviluppare *ex novo* questo punto di vista, dimostrando che è ben fondato (facendo cioé vedere che l'omissione di un certo tipo di reticoli da parte di varietà dà luogo ad un filtro nel reticolo dei tipi di interpretabilità) e in grado di essere sviluppato coerentemente con la problematica da risolvere.

1.2 Struttura della tesi

L'obiettivo principale di questa tesi è quello di fornire gli strumenti per affrontare la congettura sulla primalità del filtro di Mal'cev delle varietà a congruenze modulari, e un possibile sviluppo nella strada che porta alla sua risoluzione. Nel secondo capitolo vengono riportati i concetti essenziali per la comprensione dell'opera: ne viene fatta solo menzione, rinviando a [10] e [2] per un approfondimento. Nel terzo capitolo si ripercorre l'intera dimostrazione del celeberrimo *teorema HSP* di G. Birkhoff, [1], e riportando, alla fine, alcuni esempi di condizioni di Mal'cev, che verranno poi ripresi nel capitolo seguente, dedicato al reticolo dei tipi di interpretabilità delle varietà. Qui verranno esposte le principali proprietà del reticolo e il concetto di *filtro di Mal'cev*. Si studierà poi la primalità di alcuni di quei filtri determinati dalle condizioni di Mal'cev riportate nel capitolo precedente. L'ultimo capitolo si divide in due parti: nella prima si pongono le basi del nuovo approccio, fornendo una dimostrazione alternativa della non primalità del filtro di Mal'cev delle varietà a congruenze distributive; riformulando la congettura di Taylor e Garcìa secondo questo nuovo punto di vista, verrà fornito uno spunto di ricerca che, se sviluppato, è in grado di dirimere la questione. Nel secondo si cercherà di fornire uno spunto per il trasferimento del problema in un ambiente più ricco di proprietà del reticolo dei tipi di interpretabilità qual é il reticolo dei sottouniversi del reticolo delle equivalenze di un insieme.

Capitolo 2

Concetti base

2.1 Algebre e Cloni

Definizione 2.1. Sia A un insieme non vuoto. Una *operazione n-aria* è una funzione $Q : A^n \to A$, dove n è un intero non negativo detto *arietà* dell'operazione. Una operazione n-aria si dirà *parziale* se è definita su $B \subset A^n$.

Definizione 2.2. Si definisce *tipo* una coppia ordinata $\tau = \langle I, \rho \rangle$ dove I è un insieme non vuoto e $\rho : I \to \omega$ è la funzione *arietà*, o *rango*. Ogni $Q \in I$ è detto *simbolo di funzione*, o *simbolo di operazione*. Per abbreviare, in luogo di $Q \in I$ scriveremo $Q \in \tau$.

Definizione 2.3. Un'*algebra* di tipo $\tau = \langle I, \rho \rangle$ è una coppia ordinata $\mathbf{A} = \langle A, Q^{\mathbf{A}}(Q \in I) \rangle$ dove A è un insieme non vuoto e per ogni $Q \in I$, $Q^{\mathbf{A}}$ è una operazione $\rho(Q)$-aria. A si dirà *universo* dell'algebra, $Q^{\mathbf{A}}$ si dirà *operazione base* per ogni $Q \in I$ e I si dirà *insieme degli indici* o *insieme dei simboli di operazione* di $\mathbf{A}$.

Osservazione 2.4. Alcune considerazioni:

1. una operazione 0-aria su A viene indicata, quando è possibile, con l'unico valore che assume;

2. si noti come, in luogo di operazioni 0-arie, si possa fare ricorso ad operazioni unarie $Q(x)$ obbedienti l'*equazione* $Q(x) \approx Q(y)$. D'ora in avanti, per motivi che saranno chiari in seguito, adopereremo tale convenzione;

3. se Q è un simbolo di operazione del tipo di $\mathbf{A}$, la scrittura $Q^{\mathbf{A}}$ indica l'operazione base di $\mathbf{A}$ indiciata da Q: si dice che Q *denota* $Q^{\mathbf{A}}$, o che $Q^{\mathbf{A}}$ è l'*interpretazione* di Q. Per evitare di appesantire la notazione, useremo Q invece di $Q^{\mathbf{A}}$ ovunque non ci sia possibilità di confusione.

Definizione 2.5. Siano $\tau = \langle I, \rho \rangle$ e $\tau' = \langle I', \rho' \rangle$ due tipi, e poniamo, per ogni $n \in \omega$,

$$I_n = \{Q \in I \mid \rho(Q) = n\}.$$

Si dice che ρ è *uguale* a ρ' se $|I_n| = |I'_n|$ per ogni $n \in \omega$.

Definizione 2.6. Due algebre $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ si dicono *simili* se i loro tipi hanno funzioni rango uguali.

Definizione 2.7. Dati due tipi $\tau = \langle I, \rho \rangle$ e $\tau' = \langle I', \rho' \rangle$ si scriverà $\tau \subseteq \tau'$ se $I \subseteq I'$ e $\rho = \rho'|_I$.

Si indicherà invece con $\tau \cup \tau'$ la coppia $\langle I \cup I', \overline{\rho} \rangle$, dove $\overline{\rho}(Q) = \rho(Q)$ se $Q \in I$, mentre $\overline{\rho}(Q) = \rho'(Q)$ se $Q \in I'$.

Definizione 2.8. Sia Q una operazione n-aria su un insieme non vuoto A, e sia X un suo sottoinsieme. Si dice che X *è chiuso rispetto a* Q se e solo se per ogni $a_1, \ldots, a_n \in X$

$$Q(a_1, \ldots, a_n) \in X.$$

Se $\mathbf{A}$ è un'algebra, $X \subseteq A$ si dice un *sottouniverso di* $\mathbf{A}$ se è chiuso rispetto a tutte le operazioni di base di $\mathbf{A}$. $\mathrm{Sub}(\mathbf{A})$ indica l'insieme di tutti i sottouniversi di $\mathbf{A}$.

Definizione 2.9. Sia $\mathbf{A}$ un'algebra. L'algebra $\mathbf{B}$ è una *sottoalgebra* di $\mathbf{A}$ se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono simili, $B \subseteq A$, B è un sottouniverso di $\mathbf{A}$ e $Q^{\mathbf{B}}$ è la restrizione a B di $Q^{\mathbf{A}}$ per ogni simbolo di operazione di $\mathbf{A}$. Per indicare che $\mathbf{B}$ è una sottalgebra di $\mathbf{A}$ scriveremo $\mathbf{B} \leq \mathbf{A}$.

Definizione 2.10. Siano $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ due algebre simili e sia Q un simbolo di operazione n-aria. Una funzione $f : A \to B$ *rispetta l'interpretazione di* Q (o *rispetta* Q) se e solo se per ogni $a_1, \ldots, a_n \in A$

$$f(Q^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)) \quad = \quad Q^{\mathbf{B}}(f(a_1), \ldots f(a_n)).$$

Definizione 2.11. Siano $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ algebre simili. Una funzione $f : A \to B$ è detta un *omomorfismo* da $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ se f rispetta tutti i simboli di operazione di A. $\hom(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ indica l'insieme di tutti gli omomorfismi da $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$.

Osservazione 2.12. Alcune considerazioni:

1. Nel caso in cui $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ sia anche una funzione iniettiva, f verrà detto *monomorfismo*, mentre se è suriettiva verrà detto *epimorfismo*: in questo caso $\mathbf{B}$ si dirà *immagine omomorfa* di $\mathbf{A}$. Infine, se è biettiva, f prenderà il nome di *isomorfismo*, $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ si diranno isomorfe e si scriverà $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$;

2. un isomorfismo è una corrispondenza uno a uno tra gli elementi di due algebre che rispetta la interpretazioni di ciascun simbolo di operazione. Questo significa che due algebre isomorfe sono indistinguibili l'una dall'altra rispetto a un certo gruppo di proprietà dette "algebriche": se una di queste è vera in un'algebra allora sarà vera in tutte le immagini isomorfe di quell'algebra.

Definizione 2.13. Sia $A = \{A_i\}_{i \in I}$ una famiglia di insiemi. Una *funzione di scelta per* A è una funzione $f : I \to A$ tale che $f(i) \in A_i$ per ogni $i \in I$. Il *prodotto diretto di* A è l'insieme di tutte le funzioni di scelta di A, e si indica come

$$\prod_{i \in I} A_i \quad \text{oppure} \quad \prod A.$$

Se $A_i = B$ per ogni $i \in I$, il prodotto diretto di A si indicherà anche come B^I.

Osservazione 2.14. Ogni insieme A_i con $i \in I$ è detto *fattore* del prodotto diretto. La *i-esima proiezione*, indicata con p_i, è la funzione con dominio $\prod A$ tale che $p_i(f) = f(i)$ per ogni $f \in \prod A$. Spesso si usa la scrittura f_i invece di $f(i)$: ad esempio, ogni elemento di $\prod A$ si scrive come $(f_i)_{i \in I}$.

Definizione 2.15. Sia $\mathbf{A} = \{\mathbf{A}_i\}_{i\in I}$ una famiglia di algebre simili. Il *prodotto diretto di* $\mathbf{A}$ si indica come $\prod \mathbf{A}$ ed è l'algebra dello stesso tipo delle componenti di $\mathbf{A}$, che ha per universo l'insieme $\prod A$ tale che per ogni simbolo di operazione n-aria Q e per ogni $f^1, \dots, f^n \in \prod A$ si ha

$$(Q^{\prod \mathbf{A}}(f^1, \dots, f^n))_i \quad = \quad Q^{\mathbf{A}_i}(f_i^1, \dots, f_i^n)$$

per ogni $i \in I$. Se $\mathbf{A}_i = \mathbf{B}$ per ogni $i \in I$, il prodotto diretto di $\mathbf{A}$ si indicherà anche come $\mathbf{B}^I$.

Definizione 2.16. Siano g una operazione k-aria e $f_1, \dots, f_k$ k operazioni n-arie, entrambe su un insieme A. La *composizione* di $g, f_1, \dots, f_k$ è l'operazione n-aria h su A definita come

$$h(a_1, \dots, a_n) = g(f_1(a_1, \dots, a_n), \dots, f_k(a_1, \dots, a_n))$$

per ogni $a_1, \dots, a_n \in A$. Per chiarezza, scriveremo

$$h = g(f_1, \dots, f_k).$$

Le *operazioni proiezione*, dette più semplicemente *proiezioni*, su un insieme A sono le operazioni banali π_i^n con $1 \leq i \leq n$ che soddisfano per ogni $a_1, \dots, a_n \in A$

$$\pi_i^n(a_1, \dots, a_n) = a_i.$$

Definizione 2.17. Sia A un insieme non vuoto. Un *clono* su A è un insieme di operazioni su A che contiene le proiezioni ed è chiuso per tutte le composizioni. Il clono di *tutte* le operazioni su A lo indicheremo con $\mathrm{Clo}(A)$, mentre il clono di tutte le operazioni n-arie su A lo indicheremo con $\mathrm{Clo}_n(A)$.

Osservazione 2.18. Alcune considerazioni:

1. I cloni forniscono un importante esempio di algebre parziali, in quanto le composizioni di operazioni non sono definite per tutti gli elementi del clono; per esempio, la composizione di una operazione binaria con due operazioni ternarie è una operazione parziale ternaria sull'insieme $\mathrm{Clo}(A)$ definita non su tutte le terne di elementi ma solo per quelle terne (f_1, f_2, f_3) tali che $f_1 \in \mathrm{Clo}_2(A)$ e $f_2, f_3 \in \mathrm{Clo}_3(A)$;

2. avendo deciso in precedenza di sostituire le operazioni 0-arie con particolari operazioni unarie, è chiaro che $\mathrm{Clo}_n(A)$ è definito a partire da $n = 1$.

Definizione 2.19. Sia $\mathbf{A}$ un'algebra. Il *clono delle operazioni termini di* $\mathbf{A}$, indicato con $\mathrm{Clo}(\mathbf{A})$, è il più piccolo clono su A che contiene le operazioni di base di $\mathbf{A}$. L'insieme delle operazioni n-arie in $\mathrm{Clo}(\mathbf{A})$ sarà denotato da $\mathrm{Clo}_n(\mathbf{A})$. Gli elementi di $\mathrm{Clo}(\mathbf{A})$ si dicono *operazioni termini* di $\mathbf{A}$.

Definizione 2.20. Sia A un insieme, f una operazione k-aria su A e Σ un insieme di operazioni n-arie su A. Diciamo che Σ è *chiuso per composizione con* f se per ogni $g_1, \ldots, g_k \in \Sigma$ allora $f(g_1, \ldots, g_k) \in \Sigma$.

Teorema 2.21. *Sia* $\mathbf{A}$ *un'algebra e sia* $n \geq 1$. *Allora* $\mathrm{Clo}_n(\mathbf{A})$ *è il più piccolo insieme* Γ_n *di operazioni* n*-arie su* A *che contiene le proiezioni* n*-arie ed è chiuso per composizione con ogni operazione di base di* $\mathbf{A}$.

Osservazione 2.22. Il teorema (2.21) permette di dare una definizione induttiva di operazione termine di un'algebra $\mathbf{A}$. Si definisce $\mathrm{Clo}_n(\mathbf{A})$ come l'insieme tale che:

1. $\pi_i^n \in \mathrm{Clo}_n(\mathbf{A})$ per ogni $1 \leq i \leq n$;

2. se Q è una operazione di base k-aria di $\mathbf{A}$ e $t_1, \ldots, t_k \in \mathrm{Clo}_n(\mathbf{A})$, allora

$$Q(t_1, \ldots, t_k) \in \mathrm{Clo}_n(\mathbf{A});$$

3. nient'altro appartiene a $\mathrm{Clo}_n(\mathbf{A})$.

La dimostrazione che le due definizioni di $\mathrm{Clo}_n(\mathbf{A})$ sono equivalenti segue, appunto, dal teorema (2.21).

2.2 Reticoli e Operatori di Chiusura

Definizione 2.23. Un *reticolo* è un'algebra $\mathcal{L} = \langle L, \vee, \wedge \rangle$ le cui due operazioni binarie (dette *join* e *meet*) soddisfano le seguenti equazioni:

(L1) $x \vee y \approx y \vee x$

(L2) $x \wedge y \approx y \wedge x$

(L3) $x \vee (y \vee z) \approx (x \vee y) \vee z$

(L4) $x \wedge (y \wedge z) \approx (x \wedge y) \wedge z$

(L5) $x \vee x \approx x$

(L6) $x \wedge x \approx x$

(L7) $x \vee (y \wedge x) \approx x$

(L8) $x \wedge (y \vee x) \approx x$

Definizione 2.24. Sia A un insieme. Una relazione binaria $\leq$ è un *ordine parziale su* A se soddisfa le seguenti proprietà:

(O1) $a \leq a$

(O2) $a \leq b$ e $b \leq a$ implica $a = b$

(O3) $a \leq b$ e $b \leq c$ implica $a \leq c$

Un ordine parziale si dice *totale* se soddisfa

(O4) $a \leq b$ o $b \leq a$

Un insieme non vuoto su cui è definito un ordine parziale si dice *poset*.

Definizione 2.25. Sia P un poset e $A \subseteq P$. Un elemento $p \in P$ è un *maggiorante per* A se $a \leq p$ per ogni $a \in A$. Un elemento $p \in P$ è un *estremo superiore per* A, in simboli $\bigvee A$, se è un maggiorante per A e $a \leq b$ per ogni $a \in A$ implica $p \leq b$. Si definiscono dualmente le nozioni di *minorante per* A e *estremo inferiore per* A, in simboli $\bigwedge A$.

Definizione 2.26. Un poset L è un *reticolo* se per ogni $a, b \in L$ sia $\bigvee\{a, b\}$ che $\bigwedge\{a, b\}$ esistono in L.

La verifica che le due definizioni di reticolo sono equivalenti è un semplice esercizio.

Definizione 2.27. Due reticoli $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$ si dicono *isomorfi* se esiste una biiezione $f : L \to M$ tale che per ogni $a, b \in L$ si ha $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$ e $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$.

Definizione 2.28. Siano P e Q due poset. Una funzione $f : P \to Q$ si dice che *preserva l'ordine* se $a \leq b$ in P allora $f(a) \leq f(b)$ in Q.

Teorema 2.29. *Due reticoli $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$ sono isomorfi se e solo esiste una biiezione $f : L \to M$ tale che sia f che f^{-1} preservano l'ordine.*

Definizione 2.30. Un poset P si dice *completo* se per ogni $X \subseteq P$ esistono $\bigvee X$ e $\bigwedge X$ in P. Un reticolo si dice *completo* se è completo come poset.

Osservazione 2.31. Si noti come la definizione di reticolo garantisca l'esistenza di $\bigvee X$ e $\bigwedge X$ solo nel caso in cui X sia finito e inoltre come ogni poset completo sia un reticolo.

Definizione 2.32. Sia A un insieme. Una funzione $C : P(A) \to P(A)$ è un *operatore di chiusura* se per ogni $X, Y \in P(A)$ si ha

(C1) $X \subseteq C(X)$;

(C2) $C(C(X)) = C(X)$;

(C3) $X \subseteq Y \Rightarrow C(X) \subseteq C(Y)$.

$X \in P(A)$ si dice *chiuso* se $C(X) = X$. Indicheremo con $\mathcal{C}(A)$ l'insieme dei chiusi di A.

Definizione 2.33. Sia A un insieme. F si dice un *sistema di insiemi chiusi* su A se

(S1) $F \subseteq P(A)$;

(S2) $A \in F$;

(S3) $\bigcap G \in F$ per ogni $G \subseteq F$ non vuoto.

Proposizione 2.34. *Se C è un operatore di chiusura su A allora l'insieme*

$$F_C = \{C(X) \mid X \subseteq A\}$$

è un sistema di insiemi chiusi su A. Viceversa, se F è un sistema di insiemi chiusi su A allora la funzione $C_F : P(A) \to P(A)$ definita come

$$C_F(X) = \bigcap\{K \mid X \subseteq K \text{ e } K \in F\}$$

per ogni $X \in P(A)$ è un operatore di chiusura su A. Inoltre le due costruzioni sono l'una l'inversa dell'altra.

Teorema 2.35. *Sia C un operatore di chiusura su un insieme A. Allora $\mathcal{C}(A)$ è un reticolo completo dove*

$$\begin{aligned} \bigwedge G &= \bigcap G, \\ \bigvee G &= C\left(\bigcup G\right), \end{aligned}$$

per ogni G famiglia di chiusi di A.

Definizione 2.36. Sia $\mathcal{L}$ un reticolo. Un elemento $a \in L$ si dice *compatto* se tutte le volte che $\bigvee A$ esiste e $a \leq \bigvee A$, con $A \subseteq L$, allora $a \leq \bigvee B$ per qualche sottoinsieme finito B di A. $\mathcal{L}$ si dice *algebrico* se è completo è ogni elemento di L è un join di compatti.

Definizione 2.37. Un operatore di chiusura C su un insieme A è un *operatore di chiusura algebrico* se per ogni $X \in P(A)$ si ha

(C4) $C(X) = \bigcup\{C(Y) \mid Y \subseteq X \text{ e } Y \text{ è finito}\}$.

Teorema 2.38. *Se C è un operatore di chiusura algebrico su A allora $\mathcal{C}(A)$ è un reticolo algebrico, e i compatti di $\mathcal{C}(A)$ sono esattamente le chiusure di sottoinsiemi finiti di A.*

Definizione 2.39. Se C è un operatore di chiusura su A e Y è un sottoinsieme chiuso di A, si dice che $X \subseteq A$ è un *insieme di generatori per* Y se $C(X) = Y$. Y si dirà *finitamente generato* se esiste un insieme di generatori per Y finito.

Corollario 2.40. *Sia C un operatore di chiusura algebrico su A. Allora i sottoinsiemi finitamente generati di A sono esattamente i compatti di $\mathcal{C}(A)$.*

Teorema 2.41. *Se* $\mathbf{A}$ *è un'algebra allora* $\mathrm{Sub}(\mathbf{A})$ *è un sistema di insiemi chiusi su A il cui operatore di chiusura è*

$$\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = \bigcap \{B \mid X \subseteq B \text{ e } B \text{ è un sottouniverso di } \mathbf{A}\}.$$

Osservazione 2.42. Si scriverà Sg in luogo di $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$ quando risulterà chiaro dal contesto che ci si riferisce alla particolare algebra $\mathbf{A}$.

Lemma 2.43. *Sia* $\mathbf{A}$ *un'algebra e sia $X \subseteq A$. Definendo X_n ricorsivamente come:*

$X_0 = X,$

$X_{n+1} = X_n \cup Q_n$ *dove*

$$Q_n = \{Q(\vec{a}) \mid \ Q \text{ operazione di base } k\text{-aria di } \mathbf{A} \text{ e } \vec{a} \in X_n^k\},$$

si ha che $\mathrm{Sg}(X) = \bigcup_{n\in\omega} X_n$.

Teorema 2.44. *Se* $\mathbf{A}$ *è un'algebra allora* Sg *è un operatore di chiusura algebrico su A.*

Corollario 2.45. *Se* $\mathbf{A}$ *è un'algebra allora* $\mathbf{Sub}(\mathbf{A})$*, il reticolo il cui universo è* $\mathrm{Sub}(\mathbf{A})$ *e le cui operazioni sono definite come*

$$\begin{aligned} X \wedge Y &= X \cap Y, \\ X \vee Y &= \mathrm{Sg}(X \cup Y), \end{aligned}$$

per ogni $X, Y \in \mathrm{Sub}(\mathbf{A})$*, è un reticolo algebrico.*

Teorema 2.46. *Sia* $\mathbf{A}$ *un'algebra tale che* $A = \mathrm{Sg}(X)$*, per qualche $X \subseteq A$, e siano f e g due omomorfismi da* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$*. Se $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in X$, allora $f(a) = g(a)$ per ogni $a \in A$.*

Teorema 2.47. *Siano* $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *un omomorfismo e X un sottoinsieme di A. Allora* $f(\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)) = \mathrm{Sg}_{\mathbf{B}}(f(X))$.

Citiamo adesso un piccolo risultato che ci tornerà utile in seguito.

Teorema 2.48. *Sia* $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{A^n}$*. Allora,* $\mathrm{Clo}_n(\mathbf{A})$ *è uguale al sottouniverso di* $\mathbf{B}$ *generato dalle* n *proiezioni* $\pi_1^n, \ldots, \pi_n^n$*. Dunque, le operazioni* n*-arie di* $\mathbf{A}$ *formano un'algebra, che denoteremo con* $\mathbf{Clo}_n(\mathbf{A})$*.*

Definizione 2.49. Un reticolo si dice *distributivo* se soddisfa almeno una delle seguenti uguaglianze:

(D1) $x \wedge (y \vee z) \approx (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

(D2) $x \vee (y \wedge z) \approx (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

Si dimostra facilmente come un reticolo soddisfa (D1) se e solo se soddisfa (D2).

Definizione 2.50. Un reticolo si dice *modulare* se soddisfa la legge

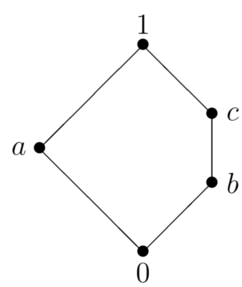
(M) $x \leq y \Rightarrow x \vee (y \wedge z) \approx y \wedge (x \vee z)$

Teorema 2.51. *Un reticolo è modulare se e solo se soddisfa l'equazione*

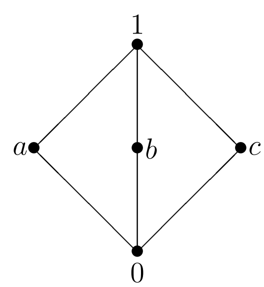
$$(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \approx y \wedge ((x \wedge y) \vee z).$$

Teorema 2.52. *Un reticolo distributivo è anche modulare.*

Definizione 2.53. Chiameremo $\mathcal{N}_5$ e $\mathcal{M}_3$ i seguenti reticoli



$\mathcal{N}_5$



$\mathcal{M}_3$

Teorema 2.54 (Dedekind)**.** *Un reticolo è modulare se e solo se non ha sottoreticoli isomorfi a* $\mathcal{N}_5$*.*

Teorema 2.55 (Birkhoff)**.** *Un reticolo è distributivo se e solo se non ha sottoreticoli isomorfi a* $\mathcal{N}_5$ *e* $\mathcal{M}_3$*.*

2.3 Congruenze e Teoremi di Isomorfismo

Definizione 2.56. Sia A un insieme. Una *relazione* R *su* A è un sottoinsieme di A^2. Una relazione R su A si dice essere una *relazione di equivalenza* se, per ogni $a, b, c \in A$

(E 1) $(a, a) \in R$;

(E 2) $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$;

(E 3) $(a, b), (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$.

L'insieme di tutte le relazioni di equivalenza su A si indicherà come $Eq(A)$.

Teorema 2.57. *Se A è un insieme, $Eq(A)$, con $\subseteq$ come ordine parziale, è un reticolo completo. Ci riferiremo ad esso come* $\mathbf{Eq}(A)$.

Definizione 2.58. Sia h un omomorfismo da $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$. Il *kernel* di h è la relazione binaria di A

$$\ker(h) = \{(a, b) \in A^2 \mid h(a) = h(b)\}.$$

Osservazione 2.59. Essendo definita in termini di uguaglianza, $\ker(h)$ è ovviamente una relazione di equivalenza. Il fatto che h sia un omomorfismo la rende però capace di soddisfare la cosiddetta *proprietà di sostituzione per* $\mathbf{A}$: sia Q una operazione di base n-aria di $\mathbf{A}$ e siano $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in A$, allora se $(a_i, b_i) \in \ker(h)$ per ogni $1 \leq i \leq n$ si ha

$$(Q(a_1, \ldots, a_n), Q(b_1, \ldots, b_n)) \in \ker(h).$$

E' quindi interessante andare a considerare tutte le relazioni di equivalenza che godono della proprietà di sostituzione.

Osservazione 2.60. Sia A è un insieme e $X \subseteq A^2$. Per convenienza di notazione, talvolta scriveremo aXa' in luogo di $(a, a') \in X$, e se

$$\vec{a} = (a_1, \ldots, a_k) \quad \text{e} \quad \vec{a}' = (a'_1, \ldots, a'_k)$$

allora scriveremo $\vec{a}X\vec{a}'$ se a_iXa_i' per ogni $i = 1, \ldots, k$. Possiamo perciò riformulare la proprietà di sostituzione per un'algebra $\mathbf{A}$ della relazione di equivalenza θ dicendo che per ogni f operazione n-aria di base di $\mathbf{A}$ e per ogni $\vec{a}, \vec{a}' \in A^n$

$$\vec{a}\theta\vec{a}' \quad \Rightarrow \quad f(\vec{a})\theta f(\vec{a}').$$

Definizione 2.61. Sia $\mathbf{A}$ un'algebra. Una *congruenza* di $\mathbf{A}$ è una relazione di equivalenza sull'universo di $\mathbf{A}$ che soddisfa la proprietà di sostituzione per $\mathbf{A}$. Indicheremo con $\mathrm{Con}(\mathbf{A})$ l'insieme di tutte le congruenze di $\mathbf{A}$.

Osservazione 2.62. Si noti come ogni algebra $\mathbf{A}$ abbia almeno due congruenze: la congruenza *diagonale*

$$\Delta_{\mathbf{A}} = \{(a, a) \mid a \in A\},$$

e la congruenza *totale*

$$\nabla_{\mathbf{A}} = \{(a, b) \mid a, b \in A\}.$$

Un'algebra $\mathbf{A}$ si dice *semplice* se $\mathrm{Con}(\mathbf{A}) = \{\Delta_{\mathbf{A}}, \nabla_{\mathbf{A}}\}$.

Teorema 2.63. *Se* $\mathbf{A}$ *è un'algebra allora* $\mathrm{Con}(\mathbf{A})$ *è un sistema di insiemi chiusi su* A^2 *il cui operatore di chiusura è*

$$\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(X) = \bigcap\{\theta \mid X \subseteq \theta \textit{ e } \theta \textit{ è una congruenza di } A\}.$$

per ogni $X \subseteq A^2$.

Osservazione 2.64. Si scriverà Cg in luogo di $\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}$ quando risulterà chiaro dal contesto che ci si riferisce alla particolare algebra $\mathbf{A}$.

Lemma 2.65. *Sia* $\mathbf{A}$ *un'algebra e* $X \subseteq A^2$*. Definendo* X_n *ricorsivamente come:*

$$X_0 = X \cup \{(a, b) \mid (b, a) \in X\} \cup \{(a, a) \mid a \in A\}$$

$$X_{n+1} = X_n \cup T_n \cup Q_n \textit{ dove}$$

$$Q_n = \{(Q(\vec{a}), Q(\vec{a}')) \mid \ Q \textit{ operazione di base } k\textit{-aria di } \mathbf{A} \textit{ e } \vec{a}X_n\vec{a}'\},$$

$$T_n = \{(a, c) \mid aX_nbX_nc \textit{ per qualche } b \in A\},$$

si ha che $\mathrm{Cg}(X) = \bigcup_{n\in\omega} X_n$.

Teorema 2.66. *Se* $\mathbf{A}$ *è un'algebra allora* Cg *è un operatore di chiusura algebrico su* A^2.

Corollario 2.67. *Se* $\mathbf{A}$ *è un'algebra allora* $\mathbf{Con}(\mathbf{A})$*, il reticolo il cui universo è* $\mathrm{Con}(\mathbf{A})$ *e le cui operazioni sono definite come*

$$\begin{aligned}\theta \wedge \phi &= \theta \cap \phi,\\ \theta \vee \phi &= \mathrm{Cg}(\theta \cup \phi),\end{aligned}$$

per ogni $\theta, \phi \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$*, è un reticolo algebrico.*

Definizione 2.68. Sia $\mathbf{A}$ un'algebra, $a \in A$ e $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$. Usiamo la notazione

$$a/\theta = \{b \in A \mid (a,b) \in \theta\},$$
$$A/\theta = \{a/\theta \mid a \in A\},$$

dove a/θ è detta *classe di congruenza di* a. La *suriezione naturale di* A *in* A/θ è la funzione $\pi_\theta : A \to A/\theta$ definita come

$$\pi_\theta(a) = a/\theta.$$

Osservazione 2.69. Sembra naturale voler dotare A/θ di una struttura in modo che la suriezione naturale funga da epimorfismo "naturale" da $\mathbf{A}$ a $\mathbf{A}/\theta$. Sia perciò $Q^{\mathbf{A}}$ una operazione di base n-aria di $\mathbf{A}$. Si definisce $Q^{\mathbf{A}/\theta}$ operazione n-aria di $\mathbf{A}/\theta$ in modo che per ogni $a_1, \ldots, a_n \in A$

$$Q^{\mathbf{A}/\theta}(a_1/\theta, \ldots, a_n/\theta) = Q^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)/\theta.$$

In questa maniera la suriezione naturale è un epimorfismo, visto che

$$\begin{aligned}\pi_\theta(Q^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)) &= Q^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)/\theta\\ &= Q^{\mathbf{A}/\theta}(a_1/\theta, \ldots, a_n/\theta)\\ &= Q^{\mathbf{A}/\theta}(\pi_\theta(a_1), \ldots, \pi_\theta(a_n)).\end{aligned}$$

Definizione 2.70. Sia $\mathbf{A}$ un'algebra e θ una congruenza di $\mathbf{A}$. L'*algebra quoziente* $\mathbf{A}/\theta$ è l'algebra simile ad $\mathbf{A}$ che ha per universo A/θ e dove $Q^{\mathbf{A}/\theta}$ è l'interpretazione di Q per ogni simbolo di operazione Q.

Teorema 2.71 (Teorema di Omomorfismo)**.** *Siano* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *due algebre simili, sia* h *un epimorfismo da* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$*,* θ *una congruenza di* $\mathbf{A}$ *e* π_θ *la relativa suriezione naturale. Allora, se* $\theta = \ker(h)$*, esiste un unico isomorfismo* $f : \mathbf{A}/\theta \to \mathbf{B}$ *che soddisfa* $f \circ \pi_\theta = h$*.*

Osservazione 2.72. Si noti come, rimuovendo l'ipotesi di suriettività di f, il Teorema di Omomorfismo possa essere riformulato come segue: *siano* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *due algebre simili, sia* h *un omomorfismo da* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$*,* θ *una congruenza di* $\mathbf{A}$ *e* π_θ *la relativa suriezione naturale. Allora, se* $\theta = \ker(h)$*, esiste un unico monomorfismo* $f : \mathbf{A}/\theta \to \mathbf{B}$ *che soddisfa* $f \circ \pi_\theta = h$*.*

La dimostrazione di questo fatto è speculare a quella del teorema (2.71), dato che la rimozione dell'ipotesi di suriettività di f implica solo la non necessaria suriettività dell'omomorfismo di raccordo.

Teorema 2.73 (Secondo Teorema di Isomorfismo)**.** *Siano* $\mathbf{A}$*,* $\mathbf{B}$ *e* $\mathbf{C}$ *tre algebre simili, e siano* $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *e* $g : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ *due omomorfismi, di cui* f *è un epimorfismo, tali che* $\ker(f) \subseteq \ker(g)$*. Allora esiste un unico omomorfismo* $h : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ *tale che* $g = h \circ f$*. Inoltre* h *è iniettiva se e solo se* $\ker(f) = \ker(g)$*.*

Definizione 2.74. Sia $\mathcal{L}$ un reticolo e $a, b \in L$ tali che $a \leq b$. Indicheremo con

$$[a, b] = \{x \in L \mid a \leq x \leq b\}.$$

La scrittura $\mathbf{I}[a, b]$ si riferirà al sottoreticolo di $\mathcal{L}$ il cui universo è $[a, b]$.

Definizione 2.75. Sia $\mathbf{A}$ un'algebra e $\theta, \phi \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$ tali che $\theta \subseteq \phi$. Si definisce dunque

$$\phi/\theta = \{(a/\theta, b/\theta) \in (A/\theta)^2 \mid (a, b) \in \phi\}.$$

Teorema 2.76 (Teorema delle Corrispondenze)**.** *Sia* $\mathbf{A}$ *un'algebra e siano* $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$*. La funzione* $f : [\theta, \nabla_{\mathbf{A}}] \to \mathrm{Con}(\mathbf{A}/\theta)$ *definita come*

$$f(\phi) = \phi/\theta$$

per ogni $\phi \in [\theta, \nabla_{\mathbf{A}}] \subseteq \mathrm{Con}(\mathbf{A})$ *è un isomorfismo di reticolo da* $\mathbf{I}[\theta, \nabla_{\mathbf{A}}]$ *a* $\mathbf{Con}(\mathbf{A}/\theta)$.

Teorema 2.77. *Sia* $\mathbf{A}$ *un'algebra. Allora* $\mathbf{A}$ *e* $\langle A, \mathrm{Clo}(\mathbf{A})\rangle$ *hanno le stesse congruenze.*

Definizione 2.78. Siano $\mathbf{A}$ e $\{\mathbf{A}_i\}_{i\in I}$ algebre dello stesso tipo. Un isomorfismo $f : \mathbf{A} \cong \prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$ è detto *una rappresentazione diretta di* $\mathbf{A}$ *in* $\{\mathbf{A}_i\}_{i\in I}$. $\mathbf{A}$ è un *prodotto sottodiretto di* $\{\mathbf{A}_i\}_{i\in I}$ se $\mathbf{A} \leq \prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$ e, per ogni proiezione i-esima π_i da $\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$ ad $\mathbf{A}_i$, $\pi_i(\mathbf{A}) = \mathbf{A}_i$. Un monomorfismo $f : \mathbf{A} \to \prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$ è una *rappresentazione sottodiretta di* $\mathbf{A}$ *in* $\{\mathbf{A}_i\}_{i\in I}$ se $f(\mathbf{A})$ è un prodotto sottodiretto di $\{\mathbf{A}_i\}_{i\in I}$. Se esiste una rappresentazione sottodiretta di $\mathbf{A}$ in $\{\mathbf{A}_i\}_{i\in I}$, si scriverà

$$\mathbf{A} \hookrightarrow \prod_{i\in I} \mathbf{A}_i.$$

Definizione 2.79. Diremo che due rappresentazioni sottodirette $f : \mathbf{A} \cong \prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$ e $g : \mathbf{A} \cong \prod_{i\in I} \mathbf{B}_i$ sono *isomorfe* se, per ogni $i \in I$, esiste un isomorfismo $h_i : \mathbf{A}_i \cong \mathbf{B}_i$ tale che $h_i \circ f_i = g_i$.

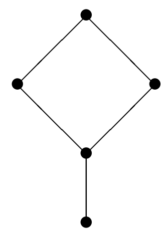
Osservazione 2.80. Ogni rappresentazione sottodiretta $f : \mathbf{A} \to \prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$ è isomorfa ad una della forma $g : \mathbf{A} \to \prod_{i\in I} \mathbf{A}/\theta_i$, dove $\theta_i = \ker(f_i)$, e f_i è l'i-esimo omomorfismo associato $\pi_i \circ f$, in base al teorema (2.71).

Teorema 2.81. *Sia* $\mathbf{A}$ *un'algebra e* $\{\theta_i\}_{i\in I} \subseteq \mathrm{Con}(\mathbf{A})$. *Allora* $\mathbf{A} \hookrightarrow \prod_{i\in I} \mathbf{A}/\theta_i$ *se e solo se* $\bigcap_{i\in I} \theta_i = \Delta_{\mathbf{A}}$.

Definizione 2.82. Un'algebra $\mathbf{A}$ si dice *sottodirettamente irriducibile* se $|A| > 1$ e per ogni rappresentazione sottodiretta $f : \mathbf{A} \to \prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$ con omomorfismi associati $f_i : \mathbf{A} \to \mathbf{A}_i$, esiste un $i \in I$ tale che $f_i : \mathbf{A} \cong \mathbf{A}_i$.

Teorema 2.83. *Un'algebra* $\mathbf{A}$ *è sottodirettamente irriducibile se e solo se* $\mathrm{Con}(\mathbf{A})$ *ha una minima congruenza non banale, i.e., una congruenza* α *tale che, per ogni altra congruenza* β, $\alpha \leq \beta$ *se e solo se* $\beta \neq \Delta_{\mathbf{A}}$.

Esempio 2.84. I reticoli $\mathcal{N}_5$ e $\mathcal{M}_3$ sono sottodirettamente irriducibili in quanto i loro reticoli delle congruenze sono



$\mathbf{Con}(\mathcal{N}_5)$

$\mathbf{Con}(\mathcal{M}_3)$

Definizione 2.85. Siano α, β due relazioni sull'insieme A. Il *prodotto relazione di α e β* è la relazione

$$\alpha \circ \beta = \{(a, b) \in A^2 \mid \exists c \in A \text{ tale che } a \ \alpha \ c \ \beta \ b\}.$$

Si dice che *α e β permutano* se $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$.

Se $\mathbf{A}$ un'algebra e $\alpha, \beta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$, allora (α, β) è una *coppia di congruenze fattore* se

(1) $\alpha \wedge \beta = \Delta_{\mathbf{A}}$,

(2) $\alpha \vee \beta = \nabla_{\mathbf{A}}$,

(3) α e β permutano.

Teorema 2.86. *Sia $\mathbf{A}$ un'algebra e $\alpha, \beta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$. Allora $\mathbf{A} \cong \mathbf{A}/\alpha \times \mathbf{A}/\beta$ se e solo se (α, β) è una coppia di congruenze fattore.*

Capitolo 3

Il Teorema HSP

Il concetto di varietà è forse il concetto centrale dell'algebra universale, e la ragione di ciò è sostanzialmente dovuta al teorema che caratterizza questa sessione, il cosiddetto *teorema HSP*. Il raggruppamento e l'organizzazione di algebre in varietà è risultata una scelta così vincente che non esistono serie alternative ad essa, soprattutto in virtù della particolare prospettiva che questo capitolo svilupperà: come già la precedente definizione di reticolo ha messo in luce, è molto più conveniente, ed anche molto più naturale, parlare di una varietà come di una classe di algebre di un determinato tipo che soddisfa una certa "assiomatizzazione". Il compito dei successivi risultati sarà quello di chiarire cosa ciò voglia dire e quali risultati immediati seguano da un simile approccio.

Nell'affrontare l'argomento, seguiremo le linee di [10] e [2], nei quali è rielaborato il contenuto dell'articolo originale, [1].

3.1 Operatori di Classe

Definizione 3.1. Una funzione che mappa classi di algebre in classi di algebre (tutte dello stesso tipo) si dice un *operatore di classe*.

Definizione 3.2. Sia $\mathfrak{K}$ una classe di algebre simili. Indicheremo con:

1. $\mathrm{I}(\mathfrak{K})$ la classe delle immagini isomorfe di membri di $\mathfrak{K}$;

2. $\mathrm{H}(\mathfrak{K})$ la classe delle immagini omomorfe di membri di $\mathfrak{K}$;

3. $\mathrm{S}(\mathfrak{K})$ la classe delle immagini isomorfe di sottalgebre di membri di $\mathfrak{K}$;

4. $\mathrm{P}(\mathfrak{K})$ la classe delle immagini isomorfe di prodotti diretti di famiglie di algebre appartenenti a $\mathfrak{K}$.

Osservazione 3.3. Alcune considerazioni:

1. Gli operatori della definizione (3.2) sono operatori di classe, e se O è uno di essi e $\mathfrak{K}, \mathfrak{K}_1$ e $\mathfrak{K}_2$ sono classi di algebre dello stesso tipo allora si noti come valgano le seguenti proprietà:

   (Incremento dell'Ordine) $\mathfrak{K} \subseteq \mathrm{O}(\mathfrak{K})$;

   (Monotonia) $\mathrm{O}(\mathfrak{K}_1) \subseteq \mathrm{O}(\mathfrak{K}_2)$ se $\mathfrak{K}_1 \subseteq \mathfrak{K}_2$;

   (Idempotenza) $\mathrm{O}(\mathrm{O}(\mathfrak{K})) = \mathrm{O}(\mathfrak{K})$.

   Tali operatori di classe possono essere quindi assimilabili ad operatori di chiusura sulla classe delle algebre di uno stesso tipo;

2. se O_1 e O_2 sono due operatori di classe, scriveremo $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$ per la loro composizione e scriveremo $\mathrm{O}_1 \leq \mathrm{O}_2$ se e solo se $\mathrm{O}_1(\mathfrak{K}) \subseteq \mathrm{O}_2(\mathfrak{K})$ per ogni classe $\mathfrak{K}$;

3. dalla definizione (3.2) segue banalmente che $\mathrm{OI} = \mathrm{O}$ e che $\mathrm{IO} = \mathrm{O}$.

Lemma 3.4. *Valgono le seguenti disuguaglianze:* $\mathrm{SH} \leq \mathrm{HS}$, $\mathrm{PS} \leq \mathrm{SP}$ *e* $\mathrm{PH} \leq \mathrm{HP}$. *Inoltre* HS, SP *e* HP *sono operatori di chiusura su una classe di algebre dello stesso tipo.*

Dimostrazione. Supponiamo $\mathbf{A} \in \mathrm{SH}(\mathfrak{K})$. Allora esistono un'algebra $\mathbf{B} \in \mathfrak{K}$ e un epimorfismo $f : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ tali che $\mathbf{A} \cong \mathbf{D} \leq \mathbf{C}$. Ma allora $f^{-1}(\mathbf{D}) \leq \mathbf{B}$, e dato che $f(f^{-1}(\mathbf{D})) = \mathbf{D}$, si ha che $\mathbf{A}$ è isomorfa a una immagine omomorfa di una sottalgebra di un membro di $\mathfrak{K}$, ovvero $\mathbf{A} \in \mathrm{HS}(\mathfrak{K})$.

Sia ora $\mathbf{A} \in \mathrm{PS}(\mathfrak{K})$; allora $\mathbf{A} = \prod_{i\in I} A_i$ per certe $\mathbf{A}_i \leq \mathbf{B}_i \in \mathfrak{K}$ per ogni $i \in I$. Ma dato che $\prod_{i\in I} A_i \leq \prod_{i\in I} B_i$, si ha $\mathbf{A} \in \mathrm{SP}(\mathfrak{K})$, il tutto ovviamente a meno di isomorfismi.

Infine, se $\mathbf{A} \in \mathrm{PH}(\mathfrak{K})$, allora esiste un sistema di algebre $\{\mathbf{A}_i\}_{i\in I} \subseteq \mathrm{H}(\mathfrak{K})$ e un isomorfismo $\alpha : \prod_{i\in I} \mathbf{A}_i \cong \mathbf{A}$. Dall'Assioma di Scelta, esiste un sistema di algebre $\{\mathbf{B}_i\}_{i\in I}$ e epimorfismi $f_i : \mathbf{B}_i \to \mathbf{A}_i$. Definendo $f : \prod_{i\in I} \mathbf{B}_i \to \prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$ come

$$f(\langle b_i \mid i \in I\rangle) = \langle f_i(b_i) \mid i \in I\rangle$$

si ha che f è suriettiva: preso $\langle a_i \mid i \in I\rangle \in \prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$, invocando l'Assioma di Scelta possiamo selezionare $b_i \in f^{-1}\{a_i\}$ per ogni $i \in I$, e considerare $\langle b_i \mid i \in I\rangle$ come sua controimmagine. Il fatto che f sia un omomorfismo segue banalmente dal fatto che gli f_i lo sono, dunque $\alpha \circ f$ è un omomorfismo da $\prod_{i\in I} \mathbf{B}_i$ a $\mathbf{A}$, e dunque $\mathbf{A} \in \mathrm{HP}(\mathfrak{K})$.

Per quanto riguarda la seconda affermazione, le proprietà di incremento dell'ordine e monotonia seguono banalmente da quelle degli operatori H, S e P. L'idempotenza segue invece dalle disuguaglianze provate in precedenza. Prendiamo ad esempio HS (la dimostrazione per gli altri operatori è identica): da una parte si ha

$$(\mathrm{HS})(\mathrm{HS}) = \mathrm{H}(\mathrm{SH})\mathrm{S} \leq \mathrm{H}(\mathrm{HS})\mathrm{S} = \mathrm{HHSS} = \mathrm{HS},$$

mentre dall'altra parte

$$\mathrm{HS} = (\mathrm{HI})(\mathrm{IS}) \leq (\mathrm{HS})(\mathrm{HS}),$$

visto che $\mathrm{I} \leq \mathrm{H}, \mathrm{S}$. □

Definizione 3.5. Diremo che una classe di algebre dello stesso tipo $\mathfrak{K}$ *è chiusa per l'operatore di classe* O se $\mathrm{O}(\mathfrak{K}) \subseteq \mathfrak{K}$.

Definizione 3.6. Una classe di algebre dello stesso tipo $\mathfrak{K}$ è una *varietà* se $\mathfrak{K}$ è chiusa per H, S e P.

Osservazione 3.7. Una classe $\mathfrak{K}$ è una varietà se e solo se le costruzioni algebriche di base (la formazione di immagini omomorfe, sottalgebre e prodotti diretti) possono essere eseguite all'interno della classe stessa. E' utile poter disporre della più piccola varietà che contiene una certa classe di algebre dello stesso tipo τ: dato che la classe di tutte le algebre di tipo τ è una varietà, e dato che l'intersezione di una qualsiasi famiglia di varietà di algebre di tipo τ è ancora una varietà, è intuitivamente chiaro che esiste la più piccola varietà che contiene una certa classe di algebre di tipo τ. (Diciamo "intuitivamente" perché trattare rigorosamente famiglie di classi e operatori su classi, nella teoria assiomatica degli insiemi, richiede estrema attenzione. Tuttavia, come il prossimo risultato mostrerà, il simbolo speciale che introdurremo per le nostre necessità può essere definito in maniera sufficientemente legittima).

Definizione 3.8. Sia $\mathfrak{K}$ una classe di algebre simili. $\mathrm{V}(\mathfrak{K})$ indicherà la più piccola varietà contenente $\mathfrak{K}$, detta *varietà generata da* $\mathfrak{K}$.

Teorema 3.9 (Tarski, [15])**.** $\mathrm{V} = \mathrm{HSP}$.

Dimostrazione. Dal lemma (3.4) si ha che

1. $\mathrm{H}(\mathrm{HSP}) = \mathrm{HSP}$;
2. $\mathrm{S}(\mathrm{HSP}) = (\mathrm{SH})\mathrm{SP} \leq \mathrm{H}(\mathrm{SS})\mathrm{P} = \mathrm{HSP}$;
3. $\mathrm{P}(\mathrm{HSP}) = (\mathrm{PH})\mathrm{SP} \leq \mathrm{H}(\mathrm{PS})\mathrm{P} \leq \mathrm{HS}(\mathrm{PP}) = \mathrm{HSP}$;

quindi per ogni $\mathfrak{K}$ si ha che $\mathrm{HSP}(\mathfrak{K})$ è chiuso per H, S e P. Dato che $\mathrm{V}(\mathfrak{K})$ è la più piccola varietà che contiene $\mathfrak{K}$ si ha che $\mathrm{V} \leq \mathrm{HSP}$. Dall'altra parte, dato che $\mathfrak{K} \subseteq \mathrm{V}(\mathfrak{K})$ si ha che $\mathrm{HSP}(\mathfrak{K}) \leq \mathrm{HSP}(\mathrm{V}(\mathfrak{K})) = \mathrm{V}(\mathfrak{K})$, visto che $\mathrm{V}(\mathfrak{K})$ è chiuso rispetto a tutti e tre gli operatori di classe, dunque $\mathrm{HSP} \leq \mathrm{V}$. $\square$

3.2 Algebre Libere

In questa sessione viene introdotto il concetto di algebra libera, illustrandone quelle proprietà che verranno utilizzate a piene mani nei capitoli successivi.

Definizione 3.10. Sia $\mathfrak{K}$ una classe di algebre di un tipo, sia $\mathbf{U}$ un'algebra di quel tipo e sia $X \subseteq U$. Diremo che $\mathbf{U}$ ha la *proprietà di immersione universale per* $\mathfrak{K}$ *su* X se per ogni $\mathbf{A} \in \mathfrak{K}$ e per ogni funzione $\alpha : X \to A$ esiste un omomorfismo $\beta : \mathbf{U} \to \mathbf{A}$ che estende α (i.e., $\beta(x) = \alpha(x)$ per ogni $x \in X$).

Definizione 3.11. Sia $\mathfrak{K}$ una classe di algebre di un tipo, sia $\mathbf{U}$ un'algebra di quel tipo e sia $X \subseteq U$. Diremo che $\mathbf{U}$ è *libera per* $\mathfrak{K}$ *su* X se $\mathbf{U}$ è generata da X e $\mathbf{U}$ ha la proprietà di immersione universale per $\mathfrak{K}$ su X. Diremo invece che $\mathbf{U}$ è *libera in* $\mathfrak{K}$ *su* X se $\mathbf{U} \in \mathfrak{K}$ e $\mathbf{U}$ è libera per $\mathfrak{K}$ su X. Se $\mathbf{U}$ è libera in $\mathfrak{K}$ su X allora X si dirà un *insieme libero di generatori per* $\mathbf{U}$, e $\mathbf{U}$ si dirà *liberamente generata da* X.

Lemma 3.12. *Se* $\mathbf{U}$ *è libera per* $\mathfrak{K}$ *su* X*, allora* $\hom(\mathbf{U}, \mathbf{A})$ *è in corrispondenza biiettiva con l'insieme delle funzioni* A^X*, cioè ad ogni funzione* $\alpha : X \to A$ *corrisponde un'unica estensione di* α *ad un omomorfismo* $\beta : \mathbf{U} \to \mathbf{A}$*.*

Dimostrazione. Segue banalmente dal teorema (2.47). □

Lemma 3.13. *Siano* $\mathfrak{K}_0 \subseteq \mathfrak{K}_1$*. Se* $\mathbf{U}$ *è libera per* $\mathfrak{K}_1$ *su* X*, allora* $\mathbf{U}$ *è libera per* $\mathfrak{K}_0$ *su* X*.*

Dimostrazione. Ovvia. □

Lemma 3.14. *Se* $\mathbf{U}$ *è libera per* $\mathfrak{K}$ *su* X*, allora* $\mathbf{U}$ *è libera per* $\mathrm{HSP}(\mathfrak{K})$ *su* X*.*

Dimostrazione. Faremo vedere che, sotto le ipotesi, allora $\mathbf{U}$ è libera su X per ciascuna delle classi $\mathrm{H}(\mathfrak{K})$, $\mathrm{S}(\mathfrak{K})$ e $\mathrm{P}(\mathfrak{K})$.

Supponiamo che $\mathbf{U}$ sia libera per $\mathfrak{K}$ su X e sia $\mathbf{A} \in \mathrm{H}(\mathfrak{K})$: allora esiste $\mathbf{B} \in \mathfrak{K}$ e un epimorfismo $\delta : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$. Sia perciò $\alpha : X \to A$ una qualsiasi funzione; dall'Assioma di Scelta esiste $\hat{\alpha} : X \to B$ tale che $\hat{\alpha}(x) \in \delta^{-1}\{\alpha(x)\}$ per ogni $x \in X$. Dunque, dalla proprietà di immersione universale di $\mathbf{U}$ su $\mathfrak{K}$, esiste un omomorfismo $\hat{\beta} : \mathbf{U} \to \mathbf{B}$ che estende $\hat{\alpha}$. Dunque $\beta = \delta \circ \hat{\beta}$ è un omomorfismo da $\mathbf{U}$ a $\mathbf{A}$, tale che per ogni $x \in X$

$$\beta(x) = \delta \circ \hat{\beta}(x) = \delta \circ \hat{\alpha}(x) = \alpha(x).$$

Dunque β è l'estensione di α cercata.

Supponiamo che $\mathbf{U}$ sia libera per $\mathfrak{K}$ su X e sia $\mathbf{A} \in \mathrm{S}(\mathfrak{K})$: dunque esiste $\mathbf{B} \in \mathfrak{K}$ tale che $\delta : \mathbf{A} \cong \mathbf{C} \leq \mathbf{B}$. Sia α una qualsiasi funzione da X ad A; dato che C è un sottouniverso di B, la funzione $\hat{\alpha} : X \to C$ definita come $\hat{\alpha}(x) = \delta \circ \alpha(x)$ per ogni $x \in X$ può essere vista in realtà come una funzione da X a B. Per la proprietà di immersione universale di $\mathbf{U}$ su $\mathfrak{K}$, esiste un omomorfismo $\hat{\beta} : \mathbf{U} \to \mathbf{B}$

che estende $\hat{\alpha}$. Si vede facilmente come $\hat{\beta}(\mathbf{U}) \leq \mathbf{C}$ dal fatto che $\mathbf{U}$ è generata da X e che C è un sottouniverso di B: basta in effetti far vedere che, dato $\hat{\alpha}(x) \in C$ per ogni $x \in X$, allora $\hat{\beta}(u) \in C$ per ogni $u \in U$. Se $\mathbf{U}$ è generata da X, allora $\mathrm{Sg}(X) = U$; dal lemma (2.43), per ogni $u \in U$ esiste un $n \geq 0$ tale che $u \in X_n$; questo implica banalmente che esistono un $m \geq 0$ e un termine $t \in \mathrm{Clo}_m(\mathbf{U})$ tali che $u = t(x_1, \ldots, x_m)$ con $x_1, \ldots, x_m \in X$. Dato che β è un omomorfismo, si dimostra per induzione sulla complessità di t che

$$\hat{\beta}(t(x_1, \ldots, x_m)) = q(\hat{\beta}(x_1), \ldots, \hat{\beta}(x_m)),$$

dove $q \in \mathrm{Clo}_m(\mathbf{B})$. Ma allora $\hat{\beta}(u) = q(\hat{\alpha}(x_1), \ldots, \hat{\alpha}(x_m))$, e basta perciò dimostrare (ancora per induzione sulla complessità dei termini) che, dato che C è un sottouniverso di B e che $u_1, \ldots, u_m \in C$ allora per ogni termine $q \in \mathrm{Clo}(\mathbf{B})$, $q(u_1, \ldots, u_m) \in C$, da cui segue banalmente $\hat{\beta}(u) \in C$. Definendo perciò $\beta : \mathbf{U} \to \mathbf{A}$ come $\beta = \delta^{-1} \circ \hat{\beta}$ si ha l'estensione di α cercata.

Infine, supponiamo che che $\mathbf{U}$ sia libera per $\mathfrak{K}$ su X e sia $\mathbf{A} \in \mathrm{P}(\mathfrak{K})$: allora esistono $\mathbf{B}_i \in \mathfrak{K}$ tale che $\delta : \prod_{i \in I} \mathbf{B}_i \cong \mathbf{A}$. Sia perciò α una qualsiasi funzione da X ad A; consideriamo $\alpha_i : X \to B_i$ per ogni $i \in I$, tale che $\alpha_i = \pi_i \circ (\delta^{-1} \circ \alpha)$. Per la proprietà di immersione universale di $\mathbf{U}$ su $\mathfrak{K}$, per ogni $i \in I$ esiste un omomorfismo $\beta_i : \mathbf{U} \to \mathbf{B}_i$ che estende α_i. Definiamo quindi $\beta : U \to A$ come

$$\beta(u) = \delta(\langle \beta_i(u) \mid i \in I \rangle);$$

il fatto che β sia un omomorfismo da $\mathbf{U}$ a $\mathbf{A}$ segue dal fatto che i β_i lo sono, e inoltre

$$\begin{aligned}
\beta(x) &= \delta(\langle \beta_i(x) \mid i \in I \rangle) \\
&= \delta(\langle \alpha_i(x) \mid i \in I \rangle) \\
&= \delta(\langle \pi_i(\delta^{-1}(\alpha(x))) \mid i \in I \rangle) \\
&= \delta(\delta^{-1}(\alpha(x))) \\
&= \alpha(x).
\end{aligned}$$

$\square$

Una notevole proprietà delle algebre libere per una stessa classe di algebre $\mathfrak{K}$, è quella di essere isomorfe a tutte le altre algebre libere per $\mathfrak{K}$ su un insieme libero di generatori della stessa cardinalità. Questo ci permette di "dimenticare" gli elementi dell'insieme libero di generatori e concentrarci sulla sua cardinalità.

Lemma 3.15. *Supponiamo che* $\mathbf{U}_1$ *e* $\mathbf{U}_2$ *sono libere per* $\mathfrak{K}$ *su* X_1 *e* X_2 *rispettivamente. Se* $|X_1| = |X_2|$ *allora* $\mathbf{U}_1 \cong \mathbf{U}_2$*.*

Dimostrazione. Se $|X_1| = |X_2|$, sia f una biiezione da X_1 a X_2; ne segue che esistono due omomorfismi $\beta : \mathbf{U}_1 \to \mathbf{U}_2$ e $\gamma : \mathbf{U}_2 \to \mathbf{U}_1$ che estendono f ed f^{-1} rispettivamente, e inoltre $\gamma \circ \beta$ estende $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{X_1}$. Dal lemma (3.12), $\gamma \circ \beta$ non può essere che l'omomomorfismo identico da $\mathbf{U}_1$ su sè stesso; alla stessa maniera si può concludere che $\beta \circ \gamma$ è l'identità su $\mathbf{U}_2$. Ne segue dunque che β è un isomorfismo tra le due algebre, e γ la sua inversa. □

Definizione 3.16. Sia $\mathfrak{K}$ una famiglia di algebre di un tipo e $\mathbf{A}$ un'algebra dello stesso tipo. Definiamo la congruenza $\Theta_{\mathbf{A}}(\mathfrak{K})$ su $\mathbf{A}$ come

$$\Theta_{\mathbf{A}}(\mathfrak{K}) = \bigcap \{\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A}) \mid \mathbf{A}/\theta \in \mathrm{S}(\mathfrak{K})\}.$$

Lemma 3.17. *Se* $\mathbf{U}$ *è libera per* $\mathfrak{K}$ *su* X*, allora* $\overline{\mathbf{U}} = \mathbf{U}/\Theta_{\mathbf{U}}(\mathfrak{K})$ *è libera per* $\mathfrak{K}$ *su* $\overline{X} = \{x/\Theta_{\mathbf{U}}(\mathfrak{K}) \mid x \in X\}$*, e* $\overline{\mathbf{U}} \in \mathrm{SP}(\mathfrak{K})$*. Quindi* $\overline{\mathbf{U}}$ *è libera in* $\mathrm{V}(\mathfrak{K})$ *su* $\overline{X}$*.*

Dimostrazione. Sia π l'epimorfismo canonico da $\mathbf{U}$ a $\mathbf{U}/\Theta_{\mathbf{U}}(\mathfrak{K}) = \overline{\mathbf{U}}$; allora chiaramente $\pi(X) = \overline{X}$ è un insieme di generatori per $\overline{\mathbf{U}}$. Per vedere come $\overline{\mathbf{U}}$ abbia la proprietà di immersione universale per $\mathfrak{K}$ su $\overline{X}$, sia $\mathbf{A} \in \mathfrak{K}$ e $\alpha : \overline{X} \to A$ una funzione; sia β l'unica estensione di $\alpha \circ \pi$ a un omomorfismo da $\mathbf{U}$ a $\mathbf{A}$. Ora, $\ker(\pi) = \Theta_{\mathbf{U}}(\mathfrak{K}) \subseteq \ker(\beta)$, perché se $(u, v) \in \ker(\pi)$ allora $(u, v) \in \theta$ per ogni $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{U})$ tale che $\mathbf{U}/\theta \in \mathrm{S}(\mathfrak{K})$: ma allora $(u, v) \in \ker(\beta)$, dato che $\mathbf{U}/\ker(\beta) \cong \beta(\mathbf{U}) \leq \mathbf{A}$. Dunque, dal teorema (2.73), esiste un omomorfismo $\hat{\beta} : \overline{\mathbf{U}} \to \mathbf{A}$ tale che $\hat{\beta} \circ \pi = \beta$: è questo l'omomorfismo cercato, dato che

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}(x/\Theta_{\mathbf{U}}(\mathfrak{K})) &= \hat{\beta}(\pi(x)) \\
&= \beta(x) \\
&= \alpha(\pi(x)) \\
&= \alpha(x/\Theta_{\mathbf{U}}(\mathfrak{K})).
\end{aligned}$$

Quindi $\overline{\mathbf{U}}$ è libera per $\mathfrak{K}$ su $\overline{X}$, ovvero, dal lemma (3.14), è libera per $\mathrm{V}(\mathfrak{K})$ su $\overline{X}$.

Per vedere come $\overline{\mathbf{U}} \in \mathrm{SP}(\mathfrak{K})$, consideriamo l'omomorfismo

$$f : \mathbf{U} \to \prod\{\mathbf{U}/\theta \mid \mathbf{U}/\theta \in \mathrm{S}(\mathfrak{K})\}$$

definito come $f(u) = \langle u/\theta \mid \mathbf{U}/\theta \in \mathrm{S}(\mathfrak{K})\rangle$ per ogni $u \in U$. Si vede facilmente come

$$\ker(f) = \Theta_{\mathbf{U}}(\mathfrak{K}),$$

dato che, per ogni $u, v \in U$, $f(u) = f(v)$ se e solo se

$$\langle u/\theta \mid \mathbf{U}/\theta \in \mathrm{S}(\mathfrak{K})\rangle = \langle v/\theta \mid \mathbf{U}/\theta \in \mathrm{S}(\mathfrak{K})\rangle,$$

se e solo se $u/\theta = v/\theta$ per ogni θ tale che $\mathbf{U}/\theta \in \mathrm{S}(\mathfrak{K})$, cioè se e solo se $(u, v) \in \bigcap\{\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A}) \mid \mathbf{U}/\theta \in \mathrm{S}(\mathfrak{K})\}$. Dunque, invocando l'osservazione (2.72), si ha che esiste un monomorfismo

$$g : \overline{\mathbf{U}} \to \prod\{\mathbf{U}/\theta \mid \mathbf{U}/\theta \in \mathrm{S}(\mathfrak{K})\},$$

cioè $\overline{\mathbf{U}} \in \mathrm{SPS}(\mathfrak{K})$, ma dato che $\mathrm{S(PS)} \leq \mathrm{(SS)P} = \mathrm{SP}$ dal lemma (3.4), si ha che $\overline{\mathbf{U}} \in \mathrm{SP}(\mathfrak{K})$. Quindi, dato che $\overline{\mathbf{U}}$ appartiene a $\mathrm{V}(\mathfrak{K})$, questa è libera in $\mathrm{V}(\mathfrak{K})$ su $\overline{X}$. □

3.3 Algebre dei Termini

Il nostro obiettivo, in questa sessione, è quello di dimostrare l'esistenza di un'algebra libera in $\mathfrak{V}$ su X, dove X è un insieme non vuoto e $\mathfrak{V}$ è una varietà con almeno un membro non banale. Per far vedere che quest'algebra esiste, la costruiremo: anzitutto, costruiremo quella libera in $\mathfrak{K}$ su X, dove $\mathfrak{K}$ è la classe di tutte le algebre del tipo di $\mathfrak{V}$. Tale algebra si dirà *assolutamente libera*, e a partire da essa otterremo l'algebra libera in $\mathfrak{V}$ su X.

Osservazione 3.18. Da qui in poi, $\sigma = \langle I, \rho\rangle$ denoterà un tipo, dove I è l'insieme dei simboli di operazione, e $\mathfrak{K}_\sigma$ la classe di tutte le algebre di tipo σ. Si ricordi come, per ogni $0 \leq n \leq \omega$,

$$I_n = \{Q \in I \mid \rho(Q) = n\}$$

sia l'insieme dei simboli di operazioni n-ari di σ.

Definizione 3.19. Una *parola sull'alfabeto* $X \cup I$ è una sequenza finita $\langle s_1, \ldots, s_n \rangle$ dove $s_i \in X \cup I$ per ogni $1 \leq i \leq n$; la indicheremo come $s_1 \cdots s_n$.

Il *prodotto* di $a = a_1 \cdots a_m$ e $b = b_1 \cdots b_n$, due parole sull'alfabeto $X \cup I$, è la parola

$$ab = a_1 \cdots a_m b_1 \cdots b_n,$$

cioè la sequenza $\langle c_1, \ldots, c_{m+n} \rangle$ tale che $c_i = a_i$ per ogni $1 \leq i \leq m$, e $c_{m+i} = b_i$ per ogni $1 \leq i \leq n$.

Definizione 3.20. L'insieme $T_\sigma(X)$ dei *termini di tipo* σ *su* X si definisce come l'insieme delle parole sull'alfabeto $X \cup I$ tale che

1. se $p \in X \cup I_0$ allora la parola $p \in T_\sigma(X)$;
2. se $Q \in I_n$ e $p_1, \ldots, p_n \in T_\sigma(X)$ allora la parola $Qp_1 \cdots p_n \in T_\sigma(X)$;
3. nient'altro sta in $T_\sigma(X)$.

Osservazione 3.21. Alcune considerazioni:

1. dalla definizione è evidente come $T_\sigma(X) = \emptyset$ se e solo se $X \cup I_0 = \emptyset$;
2. quando ci si riferisce alla *parola* u, dove $u \in X \cup I$, si intende la sequenza $\langle u \rangle$ composta di un singolo elemento.

Definizione 3.22. Se $T_\sigma(X) \neq \emptyset$, allora *l'algebra dei termini di tipo* σ *su* X, indicata con $\mathbf{T}_\sigma(X)$, è l'algebra di tipo σ che ha come universo l'insieme $T_\sigma(X)$ e, per ogni simbolo di operazione n-aria $Q \in I$, si ha

$$Q^{\mathbf{T}_\sigma(X)}(p_1, \ldots, p_n) = Qp_1 \cdots p_n,$$

per ogni $p_1, \ldots, p_n \in T_\sigma(X)$.

Teorema 3.23. $\mathbf{T}_\sigma(X)$ *è libera per* $\mathfrak{K}_\sigma$ *su* $\{\langle x \rangle \mid x \in X\}$.

Dimostrazione. Il fatto che $\mathbf{T}_\sigma(X)$ sia generata dall'insieme $\{\langle x \rangle \mid x \in X\}$ è una banale conseguenza della definizione. Sia dunque $\mathbf{A} \in \mathfrak{K}_\sigma$, e sia $\alpha : \{\langle x \rangle \mid x \in X\} \to A$ una funzione. Definiamo $\beta : \mathbf{T}_\sigma(X) \to \mathbf{A}$ per induzione sulla complessità degli elementi di $T_\sigma(X)$:

1. se la parola p è tale che $p \in X$, allora $\beta(p) = \alpha(p)$, mentre se è tale che $p \in I_0$, allora $\beta(p) = p$;

2. se $p = Qp_1 \cdots p_n$, allora

$$\beta(Qp_1 \cdots p_n) = Q^{\mathbf{A}}(\beta(p_1), \ldots, \beta(p_n)).$$

Dunque, per come è stato definito, β è un omomorfismo da $\mathbf{T}_\sigma(X)$ a $\mathbf{A}$ che estende α. □

Corollario 3.24. *Se $\mathfrak{V}$ è una varietà di algebre di tipo σ, allora*

$$\mathbf{T}_\sigma(X)/\Theta_{\mathbf{T}_\sigma(X)}(\mathfrak{V})$$

è libera in $\mathfrak{V}$ su $\{\langle x\rangle/\Theta_{\mathbf{T}_\sigma(X)}(\mathfrak{V}) \mid x \in X\}$.

Dimostrazione. Segue banalmente dal lemma (3.17) e dal teorema (3.23). □

Teorema 3.25. *Se $\mathfrak{V}$ è una varietà di algebre di tipo σ con un membro non banale, allora esiste un'algebra libera in $\mathfrak{V}$ su X.*

Dimostrazione. Dato che $\mathfrak{V}$ possiede, per ipotesi, almeno un'algebra con più di un elemento, ne segue che, per ogni $x, y \in X$,

$$x \neq y \Rightarrow \langle x\rangle/\Theta_{\mathbf{T}_\sigma(X)}(\mathfrak{V}) \neq \langle y\rangle/\Theta_{\mathbf{T}_\sigma(X)}(\mathfrak{V}),$$

ovvero la funzione $x \mapsto \langle x\rangle/\Theta_{\mathbf{T}_\sigma(X)}(\mathfrak{V})$ è iniettiva. Per il corollario precedente, $\mathbf{T}_\sigma(X)/\Theta_{\mathbf{T}_\sigma(X)}(\mathfrak{V})$ è libera in $\mathfrak{V}$ su un insieme di cardinalità pari a quella di X. La teoria degli insiemi ci permette di trovare un insieme F ed una biiezione f da F a $T_\sigma(X)/\Theta_{\mathbf{T}_\sigma(X)}(\mathfrak{V})$ tale che $X \subseteq F$ e $f(x) = \langle x\rangle/\Theta_{\mathbf{T}_\sigma(X)}(\mathfrak{V})$ per ogni $x \in X$. Dato che f è una biiezione, è possibile trovare delle operazioni su F tali che l'algebra $\mathbf{F}$ con le suddette operazioni e isomorfa a $\mathbf{T}_\sigma(X)/\Theta_{\mathbf{T}_\sigma(X)}(\mathfrak{V})$ sotto f. Perciò $\mathbf{F}$ è libera in $\mathfrak{V}$ su X. □

Definizione 3.26. $\mathbf{F}_{\mathfrak{K}}(X)$ indica un'algebra libera su $\mathrm{V}(\mathfrak{K})$ con insieme libero di generatori X. $\mathbf{F}_{\mathfrak{K}}(\kappa)$, dove κ è un numero cardinale, indica un'algebra $\mathbf{F}_{\mathfrak{K}}(X)$ tale che $|X| = \kappa$.

Osservazione 3.27. Si noti come $\mathbf{F}_{\mathfrak{K}}(X)$, se esiste, sia determinata solo a meno di un isomorfismo che si comporti come l'identità su X; dunque $\mathbf{F}_{\mathfrak{K}}(\kappa)$ è determinata a meno di isomorfismi. $\mathbf{F}_{\mathfrak{K}}(0)$ esiste se e solo se $I_0 \neq \emptyset$, mentre se $\kappa \neq 0$, $\mathbf{F}_{\mathfrak{K}}(\kappa)$ esiste se e solo se $\mathfrak{K}$ ha almeno un membro non banale oppure $\kappa = 1$.

Corollario 3.28. *Sia X un insieme e $\mathfrak{K}$ una classe di algebre di tipo σ tale che $\mathbf{F}_{\mathfrak{K}}(X)$ esista. Allora $\mathbf{F}_{\mathfrak{K}}(X) \in \mathrm{SP}(\mathfrak{K})$ e*

$$\mathbf{F}_{\mathrm{V}(\mathfrak{K})}(X) \cong \mathbf{F}_{\mathfrak{K}}(X) \cong \mathbf{T}_\sigma(X)/\Theta_{\mathbf{T}_\sigma(X)}(\mathfrak{V}).$$

Dimostrazione. Segue banalmente dai lemmi (3.14) e (3.17) e dal teorema (3.25). □

In [10] è specificato come, nel caso in cui $X \cap I = \emptyset$, $\mathbf{T}_\sigma(X)$ abbia una notevole proprietà, detta "unica leggibilità dei termini". Non parleremo di questo risultato, poiché lontano dal nostro interesse, e tuttavia assumeremo $X = \omega$ e $\omega \cap I = \emptyset$ per non discostarci dal testo di riferimento.

Definizione 3.29. Sia σ un tipo. Per *termine di tipo σ* si intende un elemento dell'algebra dei termini $\mathbf{T}_\sigma(\omega)$. Per convenzione poniamo $v_n = \langle n \rangle$ e i termini v_n $(n \geq 1)$ sono detti *variabili*.

Osservazione 3.30. Alcune considerazioni:

1. per quanto detto in precedenza, $\mathbf{T}_\sigma(\omega)$ è generata dall'insieme delle variabili $\{v_1, \ldots, v_n, \ldots\}$, e ovviamente, per ogni $n \geq 1$, l'algebra dei termini $\mathbf{T}_\sigma(n)$ è una sottalgebra di $\mathbf{T}_\sigma(\omega)$ generata da $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Dunque

$$T_\sigma(1) \subseteq T_\sigma(2) \subseteq \cdots,$$

e inoltre

$$T_\sigma(\omega) = \bigcup_{1 \leq n < \omega} T_\sigma(n);$$

2. per ogni termine p esiste un unico insieme di variabili minimo $\{x_1, \ldots, x_k\}$ tale che p appartiene al sottouniverso di $\mathbf{T}_\sigma(\omega)$ generato dall'insieme $\{x_1, \ldots, x_k\}$.

Ogni x_j è precisamente una variabile v_i tale che i occorre in p (si ricordi che l'insieme di generatori è ω). Si dice che p *dipende da* v_i, o che v_i *occorre in* p, se e solo se v_i appartiene all'insieme $\{x_1, \ldots, x_k\}$. Dunque $p \in T_\sigma(n)$ se e solo se ogni variabile che occorre in p appartiene all'insieme $\{v_1, \ldots, v_n\}$;

3. il motivo per cui si scegli proprio $\mathbf{T}_\sigma(\omega)$ come "casa" dei termini di tipo σ, è perché, avendo a che fare solo con operazioni finitarie, un termine (ottenuto dalla composizione di operazioni) è a sua volta una operazione finitaria, e $\mathbf{T}_\sigma(\omega)$ è la più piccola algebra assolutamente libera che contiene tutti i termini.

Definizione 3.31. Sia $\mathbf{A}$ un'algebra di tipo σ e $p \in T_\sigma(n)$. Definiamo l'operazione n-aria $p^{\mathbf{A}}$ su A per induzione sulla complessità di p:

1. se $p = v_i$ allora
$$p^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) = a_i,$$
cioè $p^{\mathbf{A}}$ è la proiezione n-aria π_i^n;

2. se $p = Qp_1 \cdots p_n$ allora
$$p^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) = Q^{\mathbf{A}}(p_1^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n), \ldots, p_n^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)).$$

Lemma 3.32. *Sia* $\mathbf{A}$ *un'algebra di tipo* σ *e sia* $n \in \omega$ *tale che* $n > 0$ *se* σ *non possiede operazioni* 0*-arie. La funzione* $p \mapsto p^{\mathbf{A}}$ *è un epimorfismo da* $\mathbf{T}_\sigma(n)$ *a* $\mathbf{Clo}_n(\mathbf{A})$.

Dimostrazione. La funzione in esame è banalmente un omomorfismo da $\mathbf{T}_\sigma(n)$ nella potenza diretta $\mathbf{A}^{A^n}$. Dato che $v_1, \ldots v_n$ generano $\mathbf{T}_\sigma(n)$, questo omomorfismo è suriettivo nel sottouniverso di $\mathbf{A}^{A^n}$ generato dalle proiezioni $\pi_1^n, \ldots, \pi_n^n$, per il teorema (2.47), e cioé, in base al teorema (2.48), in $\mathbf{Clo}_n(\mathbf{A})$. □

Lemma 3.33. *Siano* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}_i (i \in I)$ *algebre di tipo* σ, *e sia* p *un* σ*-termine* n*-ario. Allora:*

(1) *se* $a_1, \ldots, a_n \in A$ *e* $f : \mathbf{T}_\sigma(n) \to \mathbf{A}$ *(o* $f : \mathbf{T}_\sigma(\omega) \to \mathbf{A}$*) soddisfa* $f(v_i) = a_i$ *per ogni* $i \leq n$*, allora* $p^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) = f(p)$*;*

(2) $p = p^{\mathbf{T}_\sigma(n)}(v_1, \ldots, v_n)$*;*

(3) *Se* $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *è un omomorfismo e* $a_1, \ldots, a_n \in A$*, allora*

$$f(p^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)) \quad = \quad p^{\mathbf{B}}(f(a_1), \ldots, f(a_n)).$$

Dimostrazione. Per provare (1), si noti come componendo l'epimorfismo φ da $\mathrm{Clo}_n(\mathbf{A})$ a $\mathbf{A}$ definito come $\varphi(\pi_i^n) = a_i$ per ogni $i \leq n$, con l'omomorfismo $p \mapsto p^{\mathbf{A}}$ del lemma precedente, si ottiene un omomorfismo da $\mathbf{T}_\sigma(n)$ a $\mathbf{A}$ che associa a_i ad ogni v_i, per ogni $i \leq n$: si tratta dunque di f, e questo implica che

$$f(p) = \varphi(p^{\mathbf{A}}(x_1, \ldots, x_n)) = p^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n).$$

(2) è una immediata conseguenza di (1), considerando l'omomorfismo identità su $\mathbf{T}_\sigma(n)$.

Per quanto riguarda (3), sia $g : \mathbf{T}_\sigma(n) \to \mathbf{A}$ l'omomorfismo definito da $g(v_i) = a_i$. Allora, visto che $f \circ g : \mathbf{T}_\sigma(n) \to \mathbf{B}$ è l'omomorfismo definito da $f \circ g(v_i) = f(a_i)$, da (1) segue

$$\begin{aligned} f(p^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)) &= f(g(p)) \\ &= f \circ g(p) \\ &= p^{\mathbf{B}}(f(a_1), \ldots, f(a_n)). \end{aligned}$$

□

Osservazione 3.34. Alcune considerazioni:

1. dove chiaro dal contesto, scriveremo $p(a_1, \ldots, a_n)$ invece di $p^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)$. Se p è un termine n-ario, scriveremo $p(v_1, \ldots, v_n)$ in luogo di $p^{\mathbf{T}_\sigma(n)}(v_1, \ldots, v_n)$;

2. se $p(v_1, v_2, v_3)$ è un termine 3-ario, il termine $p(x_1, x_2, x_3)$ può non esserlo, ad esempio se p dipende da v_2 ma $x_2 = v_3$;

3. ogni termine della forma $p(q_1, \ldots, q_n)$ (dove p è n-ario e $q_1, \ldots, q_n$ sono termini) è l'immagine di p sotto un qualunque endomorfismo di $\mathbf{T}_\sigma(\omega)$ che manda v_i in q_i per ogni $i \leq n$.

3.4 Equazioni e quozienti

La più importante applicazione della nozione formale di termine da noi sviluppata, è la formalizzazione del concetto di equazione valida in un'algebra.

Definizione 3.35. Una *equazione di tipo* σ è una parola della forma $p \approx q$ dove p e q sono termini di tipo σ. Sia $\mathbf{A}$ un'algebra e $p \approx q$ una equazione (entrambi di tipo σ) e supponiamo che $p, q \in T_\sigma(n)$. Se $\vec{a} \in A^n$, diremo che $\vec{a}$ *soddisfa* $p \approx q$ *in* $\mathbf{A}$ se $p^{\mathbf{A}}(\vec{a}) = q^{\mathbf{A}}(\vec{a})$, e scriveremo

$$\mathbf{A}, \vec{a} \models p \approx q.$$

L'equazione $p \approx q$ si dice *vera in* $\mathbf{A}$ (o, equivalentemente, che $p \approx q$ *è valida in* $\mathbf{A}$, che $\mathbf{A}$ *soddisfa* $p \approx q$, che $p \approx q$ *è una identità di* $\mathbf{A}$) se $p^{\mathbf{A}} = q^{\mathbf{A}}$ (cioé se, per ogni $\vec{a} \in A^n$, $\mathbf{A}, \vec{a} \models p \approx q$), e scriveremo

$$\mathbf{A} \models p \approx q.$$

L'equazione $p \approx q$ si dice *vera in* $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{K}_\sigma$ se è vera in ogni membro di $\mathfrak{K}$, e scriveremo

$$\mathfrak{K} \models p \approx q.$$

Se Σ è un insieme di equazioni di tipo σ, diremo che Σ *è vera in* $\mathfrak{K}$ se ogni equazione di Σ è vera in $\mathfrak{K}$, e scriveremo

$$\mathfrak{K} \models \Sigma.$$

Lemma 3.36. *Sia* $\mathbf{A}$ *un'algebra e* $p \approx q$ *una equazione (entrambi di tipo* σ*). Allora sono equivalenti:*

(1) $\mathbf{A} \models p \approx q$;

(2) *se* $p, q \in T_\sigma(n)$ *allora* $\mathbf{A}, \vec{a} \models p \approx q$ *per ogni* $\vec{a} \in A^n$;

(3) *per ogni* $f \in \hom(\mathbf{T}_\sigma(n), \mathbf{A})$, $f(p) = f(q)$;

(4) *se* $p, q \in T_\sigma(n)$ *e* $x_1, \ldots, x_n$ *sono* n *variabili distinte, allora*

$$\mathbf{A} \models p(x_1, \ldots, x_n) \approx q(x_1, \ldots, x_n).$$

Dimostrazione. Banalmente, (1) e (2) sono equivalenti. Per provare l'equivalenza di (2) e (3), sia n un intero positivo tale che $p, q \in T_\sigma(n)$. Allora, dal lemma (3.33.1), segue che $p^{\mathbf{A}} = q^{\mathbf{A}}$ se e solo se $f(p) = f(q)$ per ogni $f : \mathbf{T}_\sigma(n) \to \mathbf{A}$. Dato che $\mathbf{T}_\sigma(\omega)$ è libera, ogni omomorfismo da $\mathbf{T}_\sigma(n)$ ad $\mathbf{A}$ è la restrizione di un omomorfismo da $\mathbf{T}_\sigma(\omega)$ ad $\mathbf{A}$; dunque, $p^{\mathbf{A}} = q^{\mathbf{A}}$ se e solo se $f(p) = f(q)$ per ogni $f \in \hom(\mathbf{T}_\sigma(\omega), \mathbf{A})$. Infine, sia n come in precedenza, e supponiamo che $x_1, \ldots, x_n$ siano n variabili distinte. L'assegnazione $v_i \mapsto x_i$, per ogni $i \leq n$, definisce un automorfismo ψ su $\mathbf{T}_\sigma(\omega)$ che soddisfa $\psi(p) = p(x_1, \ldots, x_n)$ e $\psi(q) = q(x_1, \ldots, x_n)$: quindi $p \approx q$ soddisfa (3) se e solo se $p(x_1, \ldots, x_n) \approx q(x_1, \ldots, x_n)$ lo soddisfa, e questo prova l'equivalenza di (1) e (4) via l'equivalenza, già dimostrata, di (1) e (3). □

Teorema 3.37. *Sia $\mathfrak{K}$ una classe di algebre di tipo σ, $p, q \in T_\sigma(n)$, X un insieme e $x_1, \ldots, x_n \in X$. Allora sono equivalenti:*

(1) $\mathfrak{K} \models p \approx q$;

(2) $(p, q) \in \Theta_{\mathbf{T}_\sigma(\omega)}(\mathfrak{K})$;

(3) *se* $\mathbf{F}_\mathfrak{K}(X)$ *esiste, allora* $\mathbf{F}_\mathfrak{K}(X) \models p \approx q$;

(4) *se* $\mathbf{F}_\mathfrak{K}(X)$ *esiste, allora*

$$p^{\mathbf{F}_\mathfrak{K}(X)}(x_1, \ldots, x_n) \quad = \quad q^{\mathbf{F}_\mathfrak{K}(X)}(x_1, \ldots, x_n).$$

Dimostrazione. Procediamo passo passo.

(1) $\iff$ (2) Supponiamo che $\mathfrak{K} \models p \approx q$, e sia $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{T}_\sigma(\omega))$ tale che $\mathbf{T}_\sigma(\omega)/\theta \in \mathrm{S}(\mathfrak{K})$: quindi $\theta = \ker(f)$, dove $f : \mathbf{T}_\sigma(\omega) \to \mathbf{A}$, per qualche $\mathbf{A} \in \mathfrak{K}$. Dato che $\mathbf{A} \models p \approx q$, si ha che $f(p) = f(q)$ dal lemma (3.36), da cui si ha che $(p, q) \in \theta$; da ciò segue $(p, q) \in \Theta_{\mathbf{T}_\sigma(\omega)}(\mathfrak{K})$, in base alla sua definizione. Inoltre, il ragionamento è chiaramente invertibile;

(2) $\Rightarrow$ (3) Partiamo dall'equivalenza di (1) e (2); grazie al corollario (3.28), sarà sufficiente dimostrare che $p \approx q$ è valida in $\mathbf{T}_\sigma(X)/\Theta_{\mathbf{T}_\sigma(X)}(\mathfrak{K})$. Sia

$$f : \mathbf{T}_\sigma(\omega) \to \mathbf{T}_\sigma(X)/\Theta_{\mathbf{T}_\sigma(X)}(\mathfrak{K})$$

un omomorfismo, e sia

$$\pi : \mathbf{T}_\sigma(X) \to \mathbf{T}_\sigma(X)/\Theta_{\mathbf{T}_\sigma(X)}(\mathfrak{K})$$

l'epimorfismo naturale. Scegliamo gli elementi $t_i \in T_\sigma(X)$ tali che $f(v_i) = \pi(t_i)$, e sia $\hat{f} : \mathbf{T}_\sigma(\omega) \to \mathbf{T}_\sigma(X)$ l'omomorfismo definito da $\hat{f}(v_i) = t_i$: allora, $\pi \circ \hat{f} = f$, e per provare che $f(p) = f(q)$ sarà sufficiente far vedere che

$$(\hat{f}(p), \hat{f}(q)) \in \Theta_{\mathbf{T}_\sigma(X)}(\mathfrak{K}),$$

il quale è, appunto, il kernel di π. Sia dunque $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{T}_\sigma(X))$ tale che $\mathbf{T}_\sigma(X)/\theta \in \mathrm{S}(\mathfrak{K})$. Allora $\theta = \ker(h)$, dove h è un omomorfismo di $\mathbf{T}_\sigma(X)$ in qualche algebra di $\mathfrak{K}$. Dato che $\mathfrak{K} \models p \approx q$, si ha che $h(\hat{f}(p)) = h(\hat{f}(q))$, cioé $(\hat{f}(p), \hat{f}(q)) \in \theta$, come si desiderava;

(3) $\Rightarrow$ (4) banale;

(4) $\Rightarrow$ (1) per dimostrare l'ultima implicazione, possiamo supporre che $\mathbf{F}_\mathfrak{K}(X)$ esista (altrimenti la varietà generata da $\mathfrak{K}$ è composta solo da algebre banali e in essa è valida qualunque equazione). Sia $f : \mathbf{T}_\sigma(\omega) \to \mathbf{A}$, con $\mathbf{A} \in \mathfrak{K}$; dobbiamo far vedere che $f(p) = f(q)$. Dato $\mathbf{F}_\mathfrak{K}(X)$ ha la proprietà di immersione universale per $\mathfrak{K}$ su X, c'è un omomorfismo $g : \mathbf{F}_\mathfrak{K}(X) \to \mathbf{A}$ tale che $g(x_i) = f(v_i)$, per ogni $i \leq n$. Sia perciò h un qualsiasi omomorfismo da $\mathbf{T}_\sigma(\omega)$ a $\mathbf{F}_\mathfrak{K}(X)$ tale che $h(v_i) = x_i$, per ogni $i \leq n$. Allora $f = g \circ h$ su $T_\sigma(n)$, visto che queste funzioni si comportano allo stesso modo sui generatori di $\mathbf{T}_\sigma(n)$. Perciò, facendo due calcoli, si ottiene che

$$\begin{aligned}
f(p) &= g(h(p(v_1, \ldots, v_n))) \\
&= g(p^{\mathbf{F}_\mathfrak{K}(X)}(h(v_1), \ldots, h(v_n))) \\
&= g(p^{\mathbf{F}_\mathfrak{K}(X)}(x_1, \ldots, x_n)) \\
&= g(q^{\mathbf{F}_\mathfrak{K}(X)}(x_1, \ldots, x_n)) \\
&= g(q^{\mathbf{F}_\mathfrak{K}(X)}(h(v_1), \ldots, h(v_n))) \\
&= g(h(q(v_1, \ldots, v_n))) \\
&= f(q).
\end{aligned}$$

□

Lemma 3.38. *Per ogni classe* $\mathfrak{K}$ *di algebre di un tipo, le classi* $\mathfrak{K}$*,* $\mathrm{P}(\mathfrak{K})$*,* $\mathrm{S}(\mathfrak{K})$*,* $\mathrm{H}(\mathfrak{K})$ *e* $\mathrm{V}(\mathfrak{K})$ *hanno precisamente le stesse equazioni valide.*

Dimostrazione. Possiamo supporre che $\mathfrak{K}$ abbia almeno un membro non banale. Sia X un insieme infinito e O uno degli operatori di chiusura per classi di algebre: allora $\mathbf{F}_{\mathfrak{K}}(X)$ e $\mathbf{F}_{\mathrm{O}(\mathfrak{K})}(X)$ esistono e, per il lemma (3.15), sono isomorfe; quindi una equazione è valida in $\mathfrak{K}$ se e solo se è valida in $\mathrm{O}(\mathfrak{K})$, dall'equivalenza di (1) e (3) nel teorema (3.37). □

Definizione 3.39. Sia $\mathfrak{K}$ una classe di algebre di tipo σ e Σ un insieme di equazioni di tipo σ. Poniamo

$$\mathrm{Th}(\mathfrak{K}) = \{p \approx q \mid \mathfrak{K} \models p \approx q\} \text{ e}$$
$$\mathrm{Mod}(\Sigma) = \{\mathbf{A} \mid \mathbf{A} \models \Sigma\}.$$

$\mathfrak{K}$ si dice una *classe equazionale* se $\mathfrak{K} = \mathrm{Mod}(\Gamma)$ per un qualche insieme Γ di equazioni di tipo σ; in questo caso, diremo che $\mathfrak{K}$ *è assiomatizzata da* Γ. Σ si dice una *teoria equazionale* se $\Sigma = \mathrm{Th}(\mathfrak{C})$ per qualche classe $\mathfrak{C}$ di algebre di tipo σ; in questo caso, diremo che Σ è la *teoria equazionale di* $\mathfrak{C}$. Infine, se $\mathfrak{K} = \mathrm{Mod}(\Sigma)$ e Σ è un insieme di equazioni finito, $\mathfrak{K}$ si dirà *finitamente assiomatizzabile.*

Lemma 3.40. *Sia* $\mathfrak{K}$ *una classe di algebre di tipo* σ*,* $\mathbf{A}$ *un'algebra di tipo* σ *e* X *un insieme tale che* $|X| \geq |\mathbf{A}|$*. Allora*

(1) *se* $\mathfrak{K}$ *consiste solo di algebre banali, allora*

$$\mathbf{A} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{K}) \iff |\mathbf{A}| = 1;$$

(2) *se* $\mathfrak{K}$ *possiede almeno un'algebra non banale, allora*

$$\mathbf{A} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{K}) \iff \mathbf{A} \in \mathrm{H}(\mathbf{F}_{\mathfrak{K}}(X)).$$

Dimostrazione. Per provare (1), si osservi che se $\mathfrak{K}$ consiste solo di algebre di un elemento, allora $x \approx y$ è una equazione valida di $\mathfrak{K}$. Questa equazione è valida in un'algebra $\mathbf{A}$ se e solo se $\mathbf{A}$ ha un solo elemento; in più, ogni equazione è valida in un'algebra di un elemento. Dunque (1) segue da queste osservazioni.

Per provare (2), assumiamo che $\mathfrak{K}$ abbia un membro non banale: quindi $\mathbf{F}_{\mathfrak{K}}(X)$ esiste e, dato che $\mathbf{F}_{\mathfrak{K}}(X) \in \mathrm{V}(\mathfrak{K})$, se $\mathbf{A} \in \mathrm{H}(\mathbf{F}_{\mathfrak{K}}(X))$ allora $\mathbf{A} \in \mathrm{V}(\mathfrak{K})$, perciò $\mathbf{A} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{K})$ (dalla definizione dell'operatore Th e dal teorema (3.37)). Viceversa, supponiamo che $\mathbf{A} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{K})$. Sia $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\mathfrak{K}_\sigma}(X)$ l'algebra assolutamente libera sull'insieme X. Data una qualsiasi funzione suriettiva $\alpha : X \to A$, sia $\beta : \mathbf{F} \to \mathbf{A}$ l'epimorfismo che estende α; sia invece δ l'omomorfismo da $\mathbf{F}$ a $\mathbf{F}_{\mathfrak{K}}(X)$ che estende l'identità su X. Dimostrando che $\ker(\delta) \subseteq \ker(\beta)$, in base al teorema (2.73) potremo concludere che $\mathbf{A}$ è una immagine omomorfa di $\mathbf{F}_{\mathfrak{K}}(X)$.

Supponiamo che $\delta(u) = \delta(v)$, dove $u, v \in F$. Sia $\{x_1, \ldots, x_n\}$ un sottoinsieme finito di X tale che u e v appartengano al sottouniverso generato da questi elementi. Quindi esistono termini di tipo σ n-ari p e q tali che $u = p^{\mathbf{F}}(x_1, \ldots, x_n)$ e $u = q^{\mathbf{F}}(x_1, \ldots, x_n)$. L'uguaglianza $\delta(u) = \delta(v)$ è equivalente a

$$p^{\mathbf{F}_{\mathfrak{K}}(X)}(x_1, \ldots, x_n) \quad = \quad q^{\mathbf{F}_{\mathfrak{K}}(X)}(x_1, \ldots, x_n),$$

dunque $p \approx q \in \mathrm{Th}(\mathfrak{K})$, dal teorema (3.37), da cui segue che $\mathbf{A} \models p \approx q$. Ma $\beta(u) = \beta(v)$ è equivalente a

$$p^{\mathbf{A}}(\alpha(x_1), \ldots, \alpha(x_n)) \quad = \quad q^{\mathbf{A}}(\alpha(x_1), \ldots, \alpha(x_n)),$$

che è una conseguenza di $\mathbf{A} \models p \approx q$, dunque $\ker(\delta) \subseteq \ker(\beta)$. □

Teorema 3.41 (Teorema HSP)**.** *Per ogni classe di algebre simili $\mathfrak{K}$,*

$$\mathrm{HSP}(\mathfrak{K}) \quad = \quad \mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathfrak{K})).$$

Quindi $\mathfrak{K}$ è una varietà se e solo se è una classe equazionale.

Dimostrazione. Dato che, dal lemma (3.38), $\mathrm{V}(\mathfrak{K}) \models \mathrm{Th}(\mathfrak{K})$, segue che $\mathrm{V}(\mathfrak{K}) \subseteq \mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathfrak{K}))$. D'altro canto, il lemma (3.40), garantisce che ogni membro di $\mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathfrak{K}))$ è una immagine omomorfa di un membro di $\mathrm{V}(\mathfrak{K})$, da cui $\mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathfrak{K})) \subseteq \mathrm{V}(\mathfrak{K})$. Perciò, se $\mathfrak{K}$ è una varietà, si ha che

$$\mathfrak{K} = \mathrm{V}(\mathfrak{K}) = \mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathfrak{K})),$$

cioé $\mathfrak{K}$ è una classe equazionale. Viceversa, se $\mathfrak{K}$ è una classe equazionale, dal lemma (3.38) segue che $\mathfrak{K}$ è una varietà. $\square$

3.5 Condizioni di Mal'cev

Una delle più fruttuose direzioni di ricerca fu iniziata da A.I. Mal'cev in [9], quando dimostrò la connessione tra permutabilità delle congruenze di tutte le algebre di una varietà $\mathfrak{V}$ e l'esistenza di un termine ternario p tale che $\mathfrak{V}$ soddisfa certe equazioni concernenti p.

La caratterizzazione di proprietà in varietà tramite l'esistenza di certi termini coinvolti in certe equazioni si dice essere una *condizione di Mal'cev*. Una definizione più precisa verrà fornita nel prossimo capitolo.

Il prossimo lemma è il motore di tutte le dimostrazioni successive.

Lemma 3.42. *Sia $\mathfrak{V}$ una varietà e sia $X = \{x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n\}$. Se esistono $p, q \in F_{\mathfrak{V}}(X)$ tali che*

$$(p(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n), q(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)) \in \mathrm{Cg}_{\mathbf{F}_{\mathfrak{V}}(X)}(\{y_1, \ldots, y_n\}^2),$$

allora

$$\mathfrak{V} \models p(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_1) \approx q(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_1).$$

Dimostrazione. Sia f l'endomorfismo di $\mathbf{F}_{\mathfrak{V}}(X)$ definito da

$$f(x_i) = x_i, \quad f(y_j) = y_1 \quad i = 1, \ldots, n \text{ e } j = 1, \ldots, m.$$

Dimostriamo, per induzione sulla definizione alternativa di Cg data dal lemma (2.65), che $\mathrm{Cg}_{\mathbf{F}_{\mathfrak{V}}(X)}(\{y_1, \ldots, y_n\}^2) \subseteq \ker(f)$: per il passo base, sia $(p, q) \in X_0$; allora $p = y_i$ e $q = y_j$ per qualche $i, j \leq n$, e chiaramente $f(p) = y_1 = f(q)$. Per il passo induttivo, supponiamo vera la tesi per tutti gli X_i con $i \leq n$, e sia $(p, q) \in X_{n+1}$; se $(p, q) \in X_n$ vale l'ipotesi induttiva; se $(p, q) \in T_n$ allora esiste $t \in F_{\mathfrak{V}}(X)$ tale che $(p, t), (t, q) \in X_n$, quindi per ipotesi induttiva $f(p) = f(t) = f(q)$; infine, se $(p, q) \in Q_n$ allora esiste una operazione n-aria Q del tipo di $\mathfrak{V}$ e n coppie

$(p_1, q_1), \ldots, (p_n, q_n) \in X_n$ tali che $p = Q(p_1, \ldots, p_n)$ e $q = Q(q_1, \ldots, q_n)$. Ma dato che, per ipotesi induttiva, $f(p_i) = f(q_i)$ per ogni $i \leq n$, e che f è un omomorfismo,

$$f(p) = Q(f(p_1), \ldots, f(p_n)) = Q(f(q_1), \ldots, f(q_n)) = f(q),$$

cioé $(p, q) \in \ker(f)$.

Da quando detto sopra, e invocando il lemma (3.33.3), segue che

$$\begin{aligned}
p(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_1) &= p(f(x_1), \ldots, f(x_m), f(y_1), \ldots, f(y_n)) \\
&= f(p(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)) \\
&= f(q(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)) \\
&= q(f(x_1), \ldots, f(x_m), f(y_1), \ldots, f(y_n)) \\
&= q(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_1),
\end{aligned}$$

e, infine, dal teorema (3.37) si ha la tesi. □

Introduciamo le condizioni di Mal'ce che studieremo più approfonditamente nei capitoli successivi.

Definizione 3.43. **A** si dice *a congruenze permutabili* se, per ogni $\alpha, \beta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$, α e β permutano. Una varietà $\mathfrak{V}$ si dice *a congruenze permutabili* se, per ogni $\mathbf{A} \in \mathfrak{V}$, **A** è a congruenze permutabili.

Teorema 3.44 (A.I. Mal'cev, [9])**.** *Sia $\mathfrak{V}$ una varietà. Allora, sono equivalenti:*

(1) *$\mathfrak{V}$ è a congruenze permutabili;*

(2) *$\mathfrak{V}$ possiede un termine ternario $m(x, y, z)$ (detto* termine di Mal'cev*) tale che*

$$\mathfrak{V} \models m(x, x, y) \approx y, m(x, y, y) \approx x.$$

Dimostrazione. Supponiamo che $\mathfrak{V}$ sia a congruenze permutabili, e indichiamo con $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\mathfrak{V}}(x, y, z)$ l'algebra libera su tre generatori (possiamo supporre che esista, perché altrimenti $\mathfrak{V}$ è composta solamente da algebre banali, e ogni termine ternario soddisfa qualunque equazione). Ora, $(x, z) \in \mathrm{Cg}_{\mathbf{F}}(x, y) \circ \mathrm{Cg}_{\mathbf{F}}(y, z)$, per cui dalla permutabilità $(x,z) \in \mathrm{Cg}_{\mathbf{F}}(y,z) \circ \mathrm{Cg}_{\mathbf{F}}(x,y)$; quindi esiste $u \in F$, e u è della forma $m^{\mathbf{F}}(x,y,z)$, con m termine ternario, tale che

$$x \ \mathrm{Cg}_{\mathbf{F}}(y,z) \ m^{\mathbf{F}}(x,y,z) \ \mathrm{Cg}_{\mathbf{F}}(x,y) \ z.$$

Perciò, dal lemma (3.42), segue che

$$\mathfrak{V} \models m(x,y,y) \approx x \quad \text{e} \quad \mathfrak{V} \models m(x,x,y) \approx y.$$

Viceversa, supponiamo che esista un siffatto termine ternario: allora ogni algebra $\mathbf{A} \in \mathfrak{V}$ ha un termine operazione $m^{\mathbf{A}}$ che soddisfa tali equazioni. Siano $\alpha, \beta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$, dove $\mathbf{A} \in \mathfrak{V}$. Se $(a,b) \in \alpha \circ \beta$ allora esiste $c \in A$ tale che $a \ \alpha \ c \ \beta \ b$, e dunque

$$a = m^{\mathbf{A}}(a,b,b) \ \beta \ m^{\mathbf{A}}(a,c,b) \ \alpha \ m^{\mathbf{A}}(c,c,b) = b,$$

cioé $(a,b) \in \beta \circ \alpha$. Essendo il viceversa ovvio, si può concludere che $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$, e quindi che le congruenze di $\mathbf{A}$ permutano, per ogni $\mathbf{A} \in \mathfrak{V}$. □

Esempio 3.45. Ecco alcune varietà a congruenze permutabili con il rispettivo termine di Mal'cev:

1. i gruppi $\langle G, \cdot, ^{-1}, 1\rangle$ sono una varietà a congruenze permutabili, il cui termine di Mal'cev è

$$p(x,y,z) = xy^{-1}z;$$

2. gli anelli $\langle R, +, \cdot, -, 0\rangle$ sono una varietà a congruenze permutabili, il cui termine di Mal'cev è

$$p(x,y,z) = x - y + z;$$

3. i quasigruppi $\langle Q, /, \backslash, \cdot\rangle$ sono una varietà a congruenze permutabili, il cui termine di Mal'cev è

$$p(x,y,z) = (x/(y\backslash y)) \cdot (y\backslash z).$$

Definizione 3.46. Un'algebra $\mathbf{A}$ si dice *a congruenze distributive* se $\mathrm{Con}(\mathbf{A})$ è un reticolo distributivo. Una varietà $\mathfrak{V}$ si dice *a congruenze distributive* se, per ogni $\mathbf{A} \in \mathfrak{V}$, $\mathbf{A}$ è a congruenze distributive.

Teorema 3.47 (B. Jònsson, [8])**.** *Sia $\mathfrak{V}$ una varietà. Allora, sono equivalenti:*

(1) *$\mathfrak{V}$ è a congruenze distributive;*

(2) *esiste n e termini ternari $d_0, \ldots, d_n$ tali che le seguenti sono equazioni valide di $\mathfrak{V}$:*

$$\begin{aligned} d_0(x,y,z) &\approx x, \\ d_i(x,y,x) &\approx x \textit{ per ogni } i \leq n, \\ d_i(x,x,y) &\approx d_{i+1}(x,x,y) \textit{ per ogni } i < n, i \textit{ pari }, \\ d_i(x,y,y) &\approx d_{i+1}(x,y,y) \textit{ per ogni } i < n, i \textit{ dispari }, \\ d_n(x,y,z) &\approx z. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Supponiamo che $\mathfrak{V}$ sia a congruenze distributive, e indichiamo con $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\mathfrak{V}}(x,y,z)$; allora

$$\begin{aligned} & \mathrm{Cg}_{\mathbf{F}}(x,z) \wedge [\mathrm{Cg}_{\mathbf{F}}(x,y) \vee \mathrm{Cg}_{\mathbf{F}}(y,z)] \\ = \ & [\mathrm{Cg}_{\mathbf{F}}(x,z) \wedge \mathrm{Cg}_{\mathbf{F}}(x,y)] \vee [\mathrm{Cg}_{\mathbf{F}}(x,z) \wedge \mathrm{Cg}_{\mathbf{F}}(y,z)] \end{aligned}$$

implica che

$$(x,z) \in [\mathrm{Cg}_{\mathbf{F}}(x,z) \wedge \mathrm{Cg}_{\mathbf{F}}(x,y)] \vee [\mathrm{Cg}_{\mathbf{F}}(x,z) \wedge \mathrm{Cg}_{\mathbf{F}}(y,z)].$$

Dunque esistono $u_1, \ldots, u_{n-1} \in F$ (e, per ogni i, $u_i = d_i^{\mathbf{F}}(x,y,z)$, con d_i elemento dell'algebra assolutamente libera del tipo di $\mathfrak{V}$) tali che

$$\begin{array}{rcl} x & [\mathrm{Cg}_{\mathbf{F}}(x,z) \vee \mathrm{Cg}_{\mathbf{F}}(x,y)] & d_1^{\mathbf{F}}(x,y,z), \\ d_1^{\mathbf{F}}(x,y,z) & [\mathrm{Cg}_{\mathbf{F}}(x,z) \wedge \mathrm{Cg}_{\mathbf{F}}(y,z)] & d_2^{\mathbf{F}}(x,y,z), \\ & \vdots & \\ d_{n-1}^{\mathbf{F}}(x,y,z) & [\mathrm{Cg}_{\mathbf{F}}(x,z) \wedge \mathrm{Cg}_{\mathbf{F}}(y,z)] & z, \end{array}$$

e da questa sequenza si ottengono le equazioni via il lemma (3.42).

Viceversa, siano $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$, dove $\mathbf{A} \in \mathfrak{V}$. Dobbiamo far vedere che

$$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \subseteq (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma),$$

visto che l'altra inclusione è banale. Sia dunque $(a, b) \in \alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$; allora $(a, b) \in \alpha$ e esistono $c_1, \ldots, c_k \in A$ tali che

$$a \ \beta \ c_1 \ \gamma \ldots \beta \ c_k \ \gamma \ b.$$

Utilizzando i termini, si ha che, per ogni $0 \leq i \leq n$,

$$d_i^{\mathbf{A}}(a, a, b) \ \beta \ d_i^{\mathbf{A}}(a, c_1, b) \ \gamma \ldots \beta \ d_i^{\mathbf{A}}(a, c_k, b) \ \gamma \ d_i^{\mathbf{A}}(a, b, b);$$

quindi

$$d_i^{\mathbf{A}}(a, a, b) \ \alpha \wedge \beta \ d_i^{\mathbf{A}}(a, c_1, b) \ \alpha \wedge \gamma \ldots \alpha \wedge \beta \ d_i^{\mathbf{A}}(a, c_k, b) \ \alpha \wedge \gamma \ d_i^{\mathbf{A}}(a, b, b),$$

e infine

$$d_i^{\mathbf{A}}(a, a, b) \ (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma) \ d_i^{\mathbf{A}}(a, b, b),$$

per ogni $0 \leq i \leq n$. Perciò, in base alle equazioni,

$$a \ (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma) \ b,$$

e dunque $\mathfrak{V}$ è a congruenze distributive. $\square$

Definizione 3.48. Un'algebra $\mathbf{A}$ si dice *a congruenze modulari* se $\mathrm{Con}(\mathbf{A})$ è un reticolo modulare. Una varietà $\mathfrak{V}$ si dice *a congruenze modulari* se, per ogni $\mathbf{A} \in \mathfrak{V}$, $\mathbf{A}$ è a congruenze modulari.

Teorema 3.49 (A. Day, [3])**.** *Sia $\mathfrak{V}$ una varietà. Allora, sono equivalenti:*

(1) *$\mathfrak{V}$ è a congruenze modulari;*

(2) *esiste n e termini quaternari $m_0, \ldots, m_n$ tali che le seguenti sono equazioni valide di $\mathfrak{V}$:*

$$\begin{array}{rcl} m_0(x,y,z,w) & \approx & x, \\ m_i(x,y,y,x) & \approx & x \text{ per ogni } i \leq n, \\ m_i(x,x,y,y) & \approx & m_{i+1}(x,x,y,y) \text{ per ogni } i < n, i \text{ pari }, \\ m_i(x,y,y,z) & \approx & m_{i+1}(x,y,y,z) \text{ per ogni } i < n, i \text{ dispari }, \\ m_n(x,y,z,w) & \approx & w. \end{array}$$

Dimostrazione. La dimostrazione sfrutta un argomento simile a quello utilizzato nel teorema (3.47). □

Definizione 3.50. Un'algebra $\mathbf{A}$ si dice *a congruenze regolari* se, per ogni $\theta, \varphi \in \operatorname{Con}(\mathbf{A})$, se esiste $a \in A$ tale che $a/\theta = a/\varphi$, allora $\theta = \varphi$. Una varietà $\mathfrak{V}$ si dice *a congruenze regolari* se, per ogni $\mathbf{A} \in \mathfrak{V}$, $\mathbf{A}$ è a congruenze regolari.

Teorema 3.51 (B. Csákány - Thurston)**.** *Sia $\mathfrak{V}$ una varietà. Allora, sono equivalenti:*

(1) *per ogni $\mathbf{A} \in \mathfrak{V}$, ogni congruenza non banale di $\mathbf{A}$ non ha classi di congruenza che sono singoletti;*

(2) *$\mathfrak{V}$ è a congruenze regolari;*

(3) *esiste n, termini ternari $r_1, \ldots, r_n$ e termini quaternari $d_1, \ldots, d_n$ tali che le seguenti sono equazioni valide di $\mathfrak{V}$:*

$$\begin{array}{rcl} r_i(x,z,z) & \approx & z \text{ per ogni } i \leq n \\ d_1(x,y,z,r_1(x,y,z)) & \approx & x, \\ d_i(x,y,r_i(x,y,z),z) & \approx & d_{i+1}(x,y,z,r_{i+1}(x,y,z)) \text{ per ogni } i < n, \\ d_n(x,y,r_n(x,y,z),z) & \approx & y. \end{array}$$

(4) *esiste n e termini ternari $r_1, \ldots, r_n$ tali che la seguente implicazione è valida in $\mathfrak{V}$:*

$$r_1(x,y,z) \approx r_2(x,y,z) \approx \ldots \approx r_n(x,y,z) \approx z \quad \Longleftrightarrow \quad x \approx y.$$

Dimostrazione. Procediamo passo passo.

(1) $\Rightarrow$ (2) Supponiamo che non valga (2), cioé che esista $\mathbf{A} \in \mathfrak{V}$ e $\theta, \varphi \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$ tali che esiste un $a \in A$ tale che $a/\theta = a/\varphi$ ma $\theta \neq \varphi$. Quindi $\theta \vee \varphi > \theta$, perciò $(\theta \vee \varphi)/\theta$ è una congruenza non banale di $\mathbf{A}/\theta$. Ora, $(a/\theta, b/\theta) \in (\theta \vee \varphi)/\theta$ se e solo se $(a, b) \in \theta \vee \varphi$, il che succede se e solo se esiste un intero non negativo n e elementi $c_1, \ldots, c_n \in A$ tali che

$$a \; \theta \; c_1 \; \varphi \; c_2 \; \theta \ldots \theta \; c_n \; \varphi \; b.$$

Ma, dato che $a/\theta = a/\varphi$,

$$a \; \varphi \; c_1 \; \varphi \; c_2 \; \theta \ldots \theta \; c_n \; \varphi \; b,$$

quindi

$$a \; \varphi \; c_2 \; \theta \ldots \theta \; c_n \; \varphi \; b,$$

ovvero abbiamo accorciato la sequenza di un elemento. Continuando in questa maniera, si arriva infine a $a\theta b$, ovvero $a/\theta = b/\theta$; dunque la congruenza $(\theta \vee \varphi)/\theta$ di $\mathbf{A}/\theta$ ha una classe di congruenza che è un singoletto, per cui (1) non vale;

(2) $\Rightarrow$ (3) consueto argomento sulle congruenze delle algebre libere;

(3) $\Rightarrow$ (4) banale;

(4) $\Rightarrow$ (1) supponiamo che valga (4) e che θ sia una congruenza non banale di $\mathbf{A} \in \mathfrak{V}$, dunque $(a, b) \in \theta$ con $a \neq b$. Perciò, per ogni $c \in A$, si ha che

$$r_i^{\mathbf{A}}(a, b, c) \theta r_i^{\mathbf{A}}(a, a, c) = c \text{ per ogni } i = 1, \ldots, n,$$

ma, dato che $a \neq b$, esiste almeno un $i \leq n$ tale che $r_i^{\mathbf{A}}(a, b, c) \neq c$ (altrimenti da (4) si avrebbe che $a = b$); questo implica che c/θ non è un singoletto.

$\square$

Capitolo 4

Il reticolo dei tipi di interpretabilità delle varietà

Il reticolo dei tipi di interpretabilità delle varietà fu introdotto da W.D. Neumann, [12], e fornisce un adeguato contesto nel quale indirizzare le questioni relative alle condizioni di Mal'cev. In questo capitolo studieremo tale reticolo, enunciando alcune basilari proprità, e faremo vedere come le condizioni di Mal'cev possano essere meglio comprese considerando i filtri del reticolo ai quali corrispondo naturalmente.

4.1 La relazione di interpretabilità

Definizione 4.1. Siano $\mathfrak{V}$ e $\mathfrak{W}$ due varietà di tipo σ e δ rispettivamente. Una *interpretazione* Φ *di* $\mathfrak{V}$ *in* $\mathfrak{W}$ è una funzione che associa ad ogni simbolo di operazione n-aria $Q \in \sigma$ un termine n-ario $t_Q \in \mathbf{T}_\delta(\omega)$ tale che, se $\mathbf{A} \in \mathfrak{W}$, allora $\Phi(\mathbf{A}) = \langle A, t_Q^{\mathbf{A}}(Q \in I)\rangle$ appartiene a $\mathfrak{V}$, dove $t_Q^{\mathbf{A}}$ è l'interpretazione del lemma (3.32) di t_Q in $\mathbf{A}$. Si dice che $\mathfrak{V}$ *è interpretabile in* $\mathfrak{W}$ se esiste una interpretazione di $\mathfrak{V}$ in $\mathfrak{W}$, e si scriverà $\mathfrak{V} \leq \mathfrak{W}$.

Osservazione 4.2. Se consentissimo ai tipi di disporre di operazioni 0-arie dovremmo riformulare così la definizione di interpretazione: se $\rho(Q) = n > 0$ non cambia nulla, mentre se $\rho(Q) = 0$, la funzione associa a Q un termine unario $t_Q \in \mathbf{T}_\delta(\omega)$

tale che

$$\mathfrak{W} \models t_Q(x) \approx t_Q(y).$$

Nel caso in cui siano accettate le operazioni 0-arie, tale estensione deriva dalla necessità di interpretare varietà con costanti nel tipo in varietà prive di costanti nel tipo.

Il problema di considerare come ammissibili le operazioni 0-arie è che queste hanno una esistenza indipendente da quella di elementi del tipo, in quanto generatori di $\mathrm{Clo}_0(\mathbf{A})$ (dove $\mathbf{A}$ è una qualsiasi algebra con una operazione 0-aria). Le costanti, dunque, non possono essere impunemente interpretate da un termine unario senza che ciò influenzi la struttura del reticolo dei tipi di interpretabilità: si ottiene infatti un diverso reticolo $\mathfrak{L}'$, la cui struttura, tuttavia, si inferisce facilmente da quella di $\mathfrak{L}$ (il reticolo che si otterrà attraverso la nostra convenzione). Una più completa discussione sull'argomento si trova nell'introduzione di [6].

Osservazione 4.3. Ecco due casi immediati di varietà interpretabili in altre:

1. se $\mathfrak{W}$ è una sottovarietà di $\mathfrak{V}$, allora $\mathfrak{V} \leq \mathfrak{W}$ via l'interpretazione identità $\Phi(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$;

2. siano σ e δ due tipi tali che $\sigma \subseteq \delta$. Se $\mathbf{A}$ è un'algebra di tipo δ, indichiamo con

$$\mathbf{A}^\sigma = \langle A, Q \in \sigma \rangle$$

l'algebra σ-ridotta di $\mathbf{A}$. Se $\mathfrak{V}$ è una varietà di tipo δ, indichiamo con

$$\mathfrak{V}^\sigma = \mathrm{HSP}(\{\mathbf{A}^\sigma \mid \mathbf{A} \in \mathfrak{V}\});$$

è dunque evidente come $\mathfrak{V}^\sigma \leq \mathfrak{V}$ per ogni $\sigma \subseteq \delta$, tramite $\Phi(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^\sigma$.

Osservazione 4.4. Diremo che due varietà $\mathfrak{V}$ e $\mathfrak{W}$ sono *interpretabili*, o che *hanno lo stesso tipo di interpretabilità*, e si scriverà $\mathfrak{V} \equiv \mathfrak{W}$, se $\mathfrak{V} \leq \mathfrak{W} \leq \mathfrak{V}$.

Il fatto che $\equiv$ sia una relazione di equivalenza discende banalmente dalla riflessività e dalla transitività della relazione $\leq$; è quindi possibile definire $[\mathfrak{V}]$, la classe di equivalenza di $\mathfrak{V}$ modulo $\equiv$, detta anche *tipo di interpretabilità*. Così facendo, la relazione

$$[\mathfrak{V}] \leq [\mathfrak{V}] \quad \text{sse} \quad \mathfrak{V} \leq \mathfrak{V}$$

è un ordine parziale nella classe dei tipi di interpretabilità.

Proposizione 4.5. *Se $\mathfrak{S}$ è la varietà dei semigruppi e $\mathfrak{Sets}$ è la varietà degli insiemi, allora $\mathfrak{Sets} \equiv \mathfrak{S}$.*

Dimostrazione. Chiaramente $\mathfrak{Sets}$ è interpretabile in qualsiasi varietà, visto che è sprovvista di operazioni. Viceversa, possiamo associare all'operazione binaria dei semigruppi la proiezione della prima componente (le proiezioni sono gli unici termini di cui $\mathfrak{Sets}$ dispone) per ottenere una interpretazione di $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{Sets}$, visto che per ogni $\mathbf{A} \in \mathfrak{Sets}$ (cioé per ogni insieme A) $\Phi(\mathbf{A}) = \langle A, \pi_1^2 \rangle$ è un semigruppo. □

Proposizione 4.6. *Sia $\mathfrak{P}$ la varietà con un simbolo di operazione ternario m assiomatizzata dall'insieme di equazioni $\{m(x,x,y) \approx y, m(x,y,y) \approx y\}$, e sia $\mathfrak{M}_2$ la varietà con tre simboli di operazione quaternari m_0, m_1, m_2 assiomatizzata dalle equazioni del teorema (3.49) per $n = 2$; allora $\mathfrak{P} \equiv \mathfrak{M}_2$.*

Dimostrazione. Per far vedere che $\mathfrak{P} \leq \mathfrak{M}_2$, poniamo

$$m(x,y,z) = m_1(x,x,y,z).$$

Verifichiamo le equazioni:

$$\begin{aligned} m(x,x,y) &= m_1(x,x,x,y) = m_2(x,x,x,y) = y, \\ m(x,y,y) &= m_1(x,x,y,y) = m_0(x,x,y,y) = x. \end{aligned}$$

Facciamo adesso vedere che $\mathfrak{M}_2 \leq \mathfrak{P}$, definendo

$$\begin{aligned} &m_0(x,y,z,w) = x, \\ &m_1(x,y,z,w) = m(x, m(x,y,z), w), \\ &m_2(x,y,z,w) = w; \end{aligned}$$

infatti si ha:

$$\begin{aligned}
m_1(x, y, y, x) &= m(x, m(x, y, y), x) = m(x, y, y) = x, \\
m_1(x, x, y, y) &= m(x, m(x, x, y), y) = m(x, y, y) = y = m_0(x, x, y, y), \\
m_1(x, y, y, z) &= m(x, m(x, y, y), z) = m(x, x, z) = z = m_2(x, y, y, z).
\end{aligned}$$

□

4.2 Proprietà basilari di $\mathfrak{L}$

Definizione 4.7. Il poset

$$\mathfrak{L} = \langle \{[\mathfrak{V}] \mid \mathfrak{V} \text{ è una varietà } \}, \leq \rangle$$

è detto *reticolo dei tipi di interpretabilità delle varietà.*

Osservazione 4.8. Da ora in avanti, assumeremo che $\mathfrak{V}$ e $\mathfrak{W}$ abbiano tipi disgiunti σ e δ (i.e. $\sigma \cap \delta = \emptyset$), e che

$$\begin{aligned}
\mathfrak{V} &= \mathrm{Mod}(\{\alpha_i \approx \beta_i \mid i \in I\}), \\
\mathfrak{W} &= \mathrm{Mod}(\{\varphi_i \approx \gamma_i \mid i \in I'\}).
\end{aligned}$$

Definizione 4.9. Il *coprodotto* delle due varietà $\mathfrak{V}$ e $\mathfrak{W}$, è la varietà $\mathfrak{V} \oplus \mathfrak{W}$ di tipo $\sigma \cup \delta$ e assiomatizzata da $\Sigma \cup \Delta$.

Proposizione 4.10. *Per ogni varietà $\mathfrak{V}$ e $\mathfrak{W}$ si ha che*

$$[\mathfrak{V}] \vee [\mathfrak{W}] = [\mathfrak{V} \oplus \mathfrak{W}].$$

Dimostrazione. Chiaramente $\mathfrak{V}, \mathfrak{W} \leq \mathfrak{V} \oplus \mathfrak{W}$, dato che $\mathfrak{V}$ e $\mathfrak{W}$ sono rispettivamente la varietà σ-ridotta e quella δ-ridotta di $\mathfrak{V} \oplus \mathfrak{W}$; supponiamo perciò che esista $\mathfrak{U}$ di tipo τ tale che

$$\mathfrak{V}, \mathfrak{W} \leq \mathfrak{U} \leq \mathfrak{V} \oplus \mathfrak{W},$$

e siano Φ_1 e Φ_2 rispettivamente le interpretazioni di $\mathfrak{V}$ in $\mathfrak{U}$ e di $\mathfrak{W}$ in $\mathfrak{U}$. Costruiamo perciò l'interpretazione Φ di $\mathfrak{V} \oplus \mathfrak{W}$ in $\mathfrak{U}$ assegnando ad ogni operazione $Q \in \sigma$ il

τ-termine associatogli da Φ_1, e ad ogni operazione $Q \in \delta$ il τ-termine associatogli da Φ_2. Facciamo vedere che, per ogni $\mathbf{A} \in \mathfrak{U}$, $\Phi(\mathbf{A}) = \langle A, t_Q^{\mathbf{A}}(Q \in \sigma \cup \delta)\rangle \in \mathfrak{V} \oplus \mathfrak{W}$: per ipotesi

$$\Phi_1(\mathbf{A}) = \langle A, t_Q^{\mathbf{A}}(Q \in \sigma)\rangle \in \mathfrak{V} \quad \Rightarrow \quad \Phi_1(\mathbf{A}) \models \mathrm{Th}(\mathfrak{V}) \text{ e}$$
$$\Phi_2(\mathbf{A}) = \langle A, t_Q^{\mathbf{A}}(Q \in \delta)\rangle \in \mathfrak{W} \quad \Rightarrow \quad \Phi_2(\mathbf{A}) \models \mathrm{Th}(\mathfrak{W}),$$

dunque $\Phi(\mathbf{A}) \models \mathrm{Th}(\mathfrak{V}) \cup \mathrm{Th}(\mathfrak{W})$, cioè $\Phi(\mathbf{A}) \in \mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathfrak{V}) \cup \mathrm{Th}(\mathfrak{W})) = \mathfrak{V} \oplus \mathfrak{W}$. Quindi $\mathfrak{V} \oplus \mathfrak{W} \leq \mathfrak{U}$, da cui $\mathfrak{V} \oplus \mathfrak{W} \equiv \mathfrak{U}$. $\square$

Osservazione 4.11. La definizione di coprodotto di due varietà si estende banalmente ad un qualunque insieme di varietà $\{\mathfrak{V}_i\}_{i\in I}$, dove ciascuna $\mathfrak{V}_i$ è di tipo σ_i e assiomatizzata dall'insieme di equazione Σ_i: $\bigoplus_{i\in I} \mathfrak{V}_i$ è la varietà di tipo $\bigcup_{i\in I} \sigma_i$ assiomatizzata da $\bigcup_{i\in I} \Sigma_i$, e si dimostra facilmente che

$$\bigvee_{i\in I} [\mathfrak{V}_i] \;=\; \left[\bigoplus_{i\in I} \mathfrak{V}_i\right].$$

Se $\mathfrak{L}$ fosse un insieme, l'esistenza di join arbitrari implicherebbe, via un argomento standard, l'esistenza di meet arbitrari, dimostrando così la completezza di $\mathfrak{L}$. Tuttavia, $\mathfrak{L}$ risulta essere una classe propria (per approfondire, cfr. [6]), quindi l'esistenza dell'estremo superiore deve essere dimostrata con un ragionamento diverso. Riportiamo il seguente, dovuto a Jan Mycielski.

Teorema 4.12. *$\mathfrak{L}$ è un reticolo completo, i.e, se $\mathfrak{K}$ è una sottoclasse di $\mathcal{L}_{\mathfrak{V}}$ che è un insieme, allora ha estremo inferiore ed estremo superiore in $\mathcal{L}_{\mathfrak{V}}$.*

Dimostrazione. Dal teorema precedente, è evidente come ogni *insieme* di varietà abbia un supremo. Per costruire l'estremo inferiore $\bigwedge \mathfrak{K}$, prendiamo la classe dei minoranti di $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$; basterà far vedere che questa ha un supremo per provare l'asserto, e, per provare ciò, sarà sufficiente dimostrare l'esistenza di un sotto*insieme* cofinale con $\mathfrak{K}'$, i.e., un insieme $K'' \subseteq K'$ tale che per ogni $\mathfrak{V} \in \mathfrak{K}'$ esiste $\mathfrak{W} \in \mathfrak{K}'$ tale che $\mathfrak{V} \leq \mathfrak{W}$.

Definiamo $\mathfrak{K}''$ come il sottoinsieme di $\mathfrak{K}'$ costituito da tutte le (classi di equivalenza di) varietà con un numero di operazioni $\leq \kappa$, dove

$$\begin{aligned} \kappa &= \prod\{\kappa(\mathfrak{U}) \mid \mathfrak{U} \in \mathfrak{K}\}, \\ \kappa(\mathfrak{U}) &= \aleph_0 + \text{ il numero di operazioni di } \mathfrak{U}. \end{aligned}$$

(L'esistenza della produttoria di cardinali è una conseguenza del fatto che $\mathfrak{K}$ è un insieme.) Facciamo dunque vedere che $\mathfrak{K}''$ ha la proprietà di cofinalità voluta: sia $\mathfrak{V} \in \mathfrak{K}'$; dato che $\mathfrak{V}$ è un minorante per $\mathfrak{K}$, si ha, per ogni $\mathfrak{U} \in \mathfrak{K}$ una interpretazione $Q \mapsto \alpha_Q^{\mathfrak{U}}$, con Q che varia sull'insieme delle operazioni di $\mathfrak{V}$, e $\alpha_Q^{\mathfrak{U}}$ è un termine nel linguaggio di $\mathfrak{U}$. Definiamo una relazione di equivalenza θ sull'insieme delle operazioni di $\mathfrak{V}$:

$$Q\theta Q' \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha_Q^{\mathfrak{U}} = \alpha_{Q'}^{\mathfrak{U}} \text{ per ogni } \mathfrak{U} \in \mathfrak{K}.$$

(dove l'uguaglianza è intesa come uguaglianza formale). Definiamo perciò, per ogni $\mathfrak{V} \in \mathfrak{K}$, la sottovarietà $\mathfrak{W}$ assiomatizzata dalle ulteriori equazioni

$$Q(x_1, x_2, \ldots) \approx Q'(x_1, x_2, \ldots) \text{ per ogni } (Q, Q') \in \theta;$$

chiaramente $\mathfrak{V} \leq \mathfrak{W}$, e inoltre ogni $\mathfrak{W}$ rimane un minorante per $\mathfrak{K}$ perché per ogni $\mathfrak{V}$ riconsideriamo la medesima interpretazione di $\mathfrak{V}$ in $\mathfrak{U}$ che avevamo inizialmente: la definizione di θ, infatti, ci dice che questa interpretazione interpreta anche le nuove identità di $\mathfrak{W}$. Quindi $\mathfrak{W} \in \mathfrak{K}'$ e, inoltre, l'aritmetica elementare dei cardinali ci dice che $\mathfrak{W}$ ha al massimo κ operazioni, per cui $\mathfrak{W} \in \mathfrak{K}''$. $\square$

Si noti che la dimostrazione precedente sia totalmente non costruttiva; in altre parole, per adesso non abbiamo idea di come sia fatto il meet di due tipi di interpretabilità. Introduciamo, quindi, il concetto di *prodotto* di due varietà.

Definizione 4.13. Il *prodotto* delle due varietà $\mathfrak{V}$ e $\mathfrak{W}$, è la varietà $\mathfrak{V} \otimes \mathfrak{W}$ che ha come simboli di operazione quelli di $\sigma \cup \delta$ più una operazione binaria (indicata con la giustapposizione), e come identità le seguenti:

$$
\begin{aligned}
xx &\approx x \\
(xy)(uv) &\approx xv \\
Q(x_1y_1, x_2y_2, \ldots) &\approx Q(x_1, x_2, \ldots)Q(y_1, y_2, \ldots) \text{ per ogni } Q \in \sigma \cup \delta \\
Q(x_1, x_2, \ldots)y &\approx x_1y \text{ per ogni } Q \in \delta \\
xQ(y_1, y_2, \ldots) &\approx xy_1 \text{ per ogni } Q \in \sigma \\
\alpha_i y &\approx \beta_i y \text{ per ogni } i \in I \\
x\varphi_i &\approx x\gamma_i \text{ per ogni } i \in I'.
\end{aligned}
$$

Proposizione 4.14. *Per ogni varietà* $\mathfrak{V}$ *e* $\mathfrak{W}$ *si ha che*

$$[\mathfrak{V}] \wedge [\mathfrak{W}] = [\mathfrak{V} \otimes \mathfrak{W}].$$

Dimostrazione. Notiamo anzitutto che $\mathfrak{V}$ è equivalente alla sottovarietà di $\mathfrak{V} \otimes \mathfrak{W}$ che soddisfa l'ulteriore equazione $xy \approx x$, mentre $\mathfrak{W}$ a quella che soddisfa $xy \approx y$. Infatti, concentrandosi sul caso di $\mathfrak{V}$, le equazioni della sottovarietà corrispondente sono:

$$
\begin{aligned}
xx &\approx x \Rightarrow x \approx x \\
(xy)(uv) &\approx xv \Rightarrow x \approx x \\
Q(x_1y_1, x_2y_2, \ldots) &\approx Q(x_1, x_2, \ldots)Q(y_1, y_2, \ldots) \\
&\Rightarrow Q(x_1, x_2, \ldots) \approx Q(x_1, x_2, \ldots) \text{ per ogni } Q \in \sigma \cup \delta \\
Q(x_1, x_2, \ldots)y &\approx x_1y \Rightarrow Q(x_1, x_2, \ldots) \approx x_1 \text{ per ogni } Q \in \delta \\
xQ(y_1, y_2, \ldots) &\approx xy_1 \Rightarrow x \approx x \text{ per ogni } Q \in \sigma \\
\alpha_i y &\approx \beta_i y \Rightarrow \alpha_i \approx \beta_i \text{ per ogni } i \in I \\
x\varphi_i &\approx x\gamma_i \Rightarrow x \approx x \text{ per ogni } i \in I'.
\end{aligned}
$$

Questo significa che la sottovarietà corrispondente soddisfa le medesime equazioni di $\mathfrak{V}$ più, oltre a quelle banali del tipo $x \approx x$, altre che rendono sia le operazioni di tipo δ che l'operazione di giustapposizione delle proiezioni (eliminandole entrambe formalmente). Essendo le interpretazioni in entrambi i versi ovvie, possiamo trattare le due varietà $\mathfrak{V}$ e $\mathfrak{W}$ come le due sottovarietà di $\mathfrak{V} \otimes \mathfrak{W}$ succitate, e quindi $\mathfrak{V} \otimes \mathfrak{W} \leq \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$. Supponiamo, quindi, che esista $\mathfrak{U}$ di tipo τ tale che

$$\mathfrak{V} \otimes \mathfrak{W} \leq \mathfrak{U} \leq \mathfrak{V}, \mathfrak{W},$$

e siano Φ_1 e Φ_2 rispettivamente le interpretazioni di $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{V}$ e di $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{W}$; dunque, ad ogni $Q \in \tau$ sono associati un σ-termine α_Q e un δ-termine β_Q tali che $\Phi_1(\mathbf{A}) = \langle A, \alpha_Q^{\mathbf{A}}(Q \in \tau)\rangle, \Phi_2(\mathbf{A}) = \langle A, \beta_Q^{\mathbf{A}}(Q \in \tau)\rangle \in \mathfrak{U}$. Costruiamo l'interpretazione Φ di $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{V} \otimes \mathfrak{W}$ associando ad ogni $Q \in \tau$ il termine $\alpha_Q \beta_Q$. Omettiamo la banale dimostrazione per induzione del fatto che, per ogni $\mathbf{A} \in \mathfrak{V} \otimes \mathfrak{W}$, $\Phi(\mathbf{A}) = \langle A, \alpha_Q^{\mathbf{A}} \beta_Q^{\mathbf{A}}(Q \in \tau)\rangle \in \mathfrak{U}$. □

Per questioni di semplicità nell'enunciare la seguente proposizione (e da ora in poi), e motivati dall'argomento utilizzato nella proposizione precedente, assumeremo che $\mathfrak{V}$ sia la sottovarietà di $\mathfrak{V} \otimes \mathfrak{W}$ assiomatizzata dall'ulteriore equazione $xy \approx x$, e che $\mathfrak{W}$ sia la sottovarietà di $\mathfrak{V} \otimes \mathfrak{W}$ assiomatizzata dall'ulteriore equazione $xy \approx y$.

Proposizione 4.15. *Ogni* $\mathbf{C} \in \mathfrak{V} \otimes \mathfrak{W}$ *è isomorfa a* $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ *per certe* $\mathbf{A} \in \mathfrak{V}$ *e* $\mathbf{B} \in \mathfrak{W}$. *Inoltre, ogni omomorfismo* $\gamma : \mathbf{A}_1 \times \mathbf{B}_1 \to \mathbf{A}_2 \times \mathbf{B}_2$ *ha la forma* $\gamma(a, b) = (\alpha(a), \beta(b))$ *per certi unici omomorfismi* $\alpha : \mathbf{A}_1 \to \mathbf{A}_2$ *e* $\beta : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2$. *Indicheremo* γ *con* $\alpha \times \beta$.

Dimostrazione. Scegliamo $d \in \mathbf{C}$ e definiamo le due relazioni di equivalenza

$$\begin{aligned} (u, v) \in \alpha &\iff ud = vd, \\ (u, v) \in \beta &\iff du = dv. \end{aligned}$$

Non è difficile far vedere che $\alpha, \beta \in \mathrm{Con}(\mathbf{C})$; facciamo vedere ad esempio che α ha la proprietà di sostituzione per la giustapposizione: siano $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \alpha$, allora

$$(u_1 u_2)d = (u_1 u_2)(dd) = u_1 d = v_1 d = (v_1 v_2)(dd) = (v_1 v_2)d,$$

dunque $(u_1u_2, v_1v_2) \in \alpha$. La verifica delle altre operazioni del tipo la si fa invocando le identità necessarie all'occorrenza. Supponiamo adesso che $(u, v) \in \alpha \cap \beta$, cioé $ud = vd$ e $du = dv$; ciò implica che

$$u = uu = (ud)(du) = (vd)(dv) = vv = v,$$

cioé $\alpha \cap \beta = \Delta_{\mathbf{C}}$. Inoltre, per ogni $u, v \in \mathbf{C}$

$$(uv)d = (uv)(dd) = ud \quad \text{e} \quad d(uv) = (dd)(uv) = dv,$$

e quindi $u \; \alpha \; uv \; \beta \; v$, ovvero $(u, v) \in \alpha \circ \beta$ per ogni $u, v \in \mathbf{C}$: quindi $\alpha \circ \beta = \nabla_{\mathbf{C}}$. Perciò α e β sono una coppia di congruenze fattore, e dal teorema (2.86) segue che

$$\mathbf{C} \cong \mathbf{C}/\alpha \times \mathbf{C}/\beta.$$

Resta da far vedere che $\mathbf{C}/\alpha \in \mathfrak{V}$ (intesa come la sottovarietà di $\mathfrak{V} \otimes \mathfrak{W}$ che soddisfa l'ulteriore equazione $xy \approx x$): mostreremo per l'appunto che $\mathbf{C}/\alpha$ soddisfa l'equazione $xy \approx x$. Siano $u/\alpha, v/\alpha \in \mathbf{C}/\alpha$; dunque

$$(u/\alpha)(v/\alpha) = (uv)/\alpha = u/\alpha,$$

perché $uv \; \alpha \; u$. La dimostrazione del fatto che $\mathbf{C}/\beta \in \mathfrak{W}$ è analoga. Dal seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_1 \arrow[r, "\alpha"] & \mathbf{A}_2 \\
\mathbf{A}_1 \times \mathbf{B}_1 \arrow[u, two heads, "\pi_{\mathbf{A}_1}"] \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, two heads, "\pi_{\mathbf{B}_1}"'] & \mathbf{A}_2 \times \mathbf{B}_2 \arrow[u, two heads, "\pi_{\mathbf{A}_2}"] \arrow[d, two heads, "\pi_{\mathbf{B}_2}"'] \\
\mathbf{B}_1 \arrow[r, "\beta"] & \mathbf{B}_2
\end{tikzcd}$$

si evince come, invocando il teorema (2.71) sulle coppie di omomorfismi $\pi_{\mathbf{A}_1}$, $\pi_{\mathbf{A}_2} \circ \gamma$ e $\pi_{\mathbf{B}_1}$, $\pi_{\mathbf{B}_2} \circ \gamma$, si ottengano i due omomorfismi α e β tali che

$$\begin{aligned} \alpha \circ \pi_{\mathbf{A}_1} &= \pi_{\mathbf{A}_2} \circ \gamma, \\ \beta \circ \pi_{\mathbf{B}_1} &= \pi_{\mathbf{B}_2} \circ \gamma, \end{aligned}$$

cioé per ogni coppia $(a, b) \in \mathbf{A}_1 \times \mathbf{B}_1$, $\gamma(a, b) = (\alpha(a), \beta(b))$. $\square$

Diamo, infine, le caratterizzazioni del massimo e del minimo di $\mathfrak{L}$ (che esistono per via della completezza del reticolo).

Proposizione 4.16. *Per una varietà $\mathfrak{V}$ sono equivalenti:*

(1) *$[\mathfrak{V}]$ è il massimo in $\mathfrak{L}$;*

(2) $\mathfrak{V} \models x \approx y$.

Dimostrazione. Se $\mathfrak{V} \models x \approx y$, allora $\mathfrak{V}$ consiste interamente di algebre banali, e perciò è una sottovarietà di ogni varietà (tenendo a mente che le costanti sono sostituite con operazioni unarie). Se invece $[\mathfrak{V}]$ è il massimo in $\mathcal{L}_{\mathfrak{V}}$ allora ogni varietà è interpretabile in $\mathfrak{V}$, compresa la varietà che soddisfa l'identità $x \approx y$; dunque ogni algebra di $\mathfrak{V}$ è un'algebra banale, cioè soddisfa $x \approx y$. □

Proposizione 4.17. *Per una varietà $\mathfrak{V}$ sono equivalenti:*

(1) *$[\mathfrak{V}]$ è il minimo in $\mathfrak{L}$;*

(2) $\mathfrak{V} \leq \mathfrak{Sets}$;

(3) *$\mathfrak{V}$ ha un modello non banale in cui ogni operazione è una proiezione.*

Dimostrazione. Il primo e il secondo punto sono equivalenti, visto che $\mathfrak{Sets}$ è interpretabile in ogni varietà. Se $\mathfrak{V} \leq \mathfrak{Sets}$, allora $\mathfrak{V}$ ha un modello non banale (i.e., un modello che soddisfa l'identità $x \approx y$), altrimenti sarebbe il massimo di $\mathcal{L}_{\mathfrak{V}}$; inoltre ne ha anche uno in cui ogni operazione è una proiezione, visto che queste sono gli unici termini disponibili in $\mathfrak{Sets}$ per l'interpretazione. Se invece $\mathfrak{V}$ ha un modello non banale in cui ogni operazione è una proiezione, $\mathfrak{Sets}$ è equivalente a una sottovarietà di $\mathfrak{V}$, e dunque $\mathfrak{V} \leq \mathfrak{Sets}$. □

4.3 Filtri di $\mathfrak{L}$

Definizione 4.18. Sia $\mathcal{L}$ un reticolo. Un *filtro $\mathcal{F}$ di $\mathcal{L}$* è un sottoinsieme non vuoto $F \subseteq L$ tale che, per ogni $a, b \in L$,

(1) $a, b \in F$ implica $a \wedge b \in F$;

(2) $a \in F$ e $a \leq b$ implicano $b \in F$.

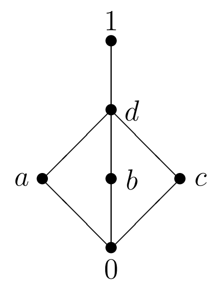
Un filtro $\mathcal{F}$ di $\mathcal{L}$ si dice *primo* se, per ogni $a, b \in L$,

(3) $a \vee b \in F$ implica $a \in F$ o $b \in F$.

Un filtro $\mathcal{F}$ di $\mathcal{L}$ si dice *irriducibile* se ogniqualvolta è l'intersezione di due filtri, allora uno di essi è $\mathcal{F}$ stesso.

Osservazione 4.19. Se un filtro è primo, allora è irriducibile, ma non vale il viceversa. Per dimostrarlo, supponiamo che $\mathcal{F}$ sia un filtro primo tale che $F = A \cap B$, per certi filtri $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, ma $F \neq A, B$: allora esistono $a \in A$ e $b \in B$ tali che $a, b \notin F$. Dato che $a, b \leq a \vee b$, $a \vee b \in A \cap B$, perciò $a \vee b \in F$. Ma $\mathcal{F}$ è primo, dunque ciò comporta che $a \in F$ o $b \in F$, contro l'ipotesi.

Per far vedere che non vale il viceversa, consideriamo l'intervallo $[c, 1]$ del seguente reticolo:



Tale intervallo è chiaramente un filtro irriducibile, e tuttavia $d = a \vee b$, ma né a né b sono elementi di $[c, 1]$.

Definizione 4.20. Un filtro $\mathfrak{F}$ di $\mathfrak{L}$ è un *filtro di Mal'cev* se esistono varietà $\mathfrak{V}_1 \geq \mathfrak{V}_2 \geq \ldots \geq \mathfrak{V}_n \geq \ldots$ finitamente assiomatizzabili e di tipo finito, tali che

$$\mathfrak{F} = \{[\mathfrak{W}] \mid \exists n > 0 \text{ tale che } \mathfrak{V}_n \leq \mathfrak{W}\}.$$

Una classe $\mathfrak{K}$ di varietà è una *classe di Mal'cev* se esiste un filtro di Mal'cev $\mathfrak{F}$ tale che

$$\mathfrak{K} = \bigcup \mathfrak{F} = \{\mathfrak{W} \mid [\mathfrak{W}] \in \mathfrak{F}\}.$$

Una *condizione di Mal'cev* è una sequenza $(\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots)$ tale che Σ_i è un insieme finito di identità per $\mathfrak{V}_i$ come sopra. Una condizione di Mal'cev si dice *forte* se la sequenza di cui sopra è composta solo da Σ_1.

Esempio 4.21. Ecco alcuni esempi di classi di Mal'cev:

1. la classe $\mathfrak{K}_{\mathfrak{P}}$ delle varietà a congruenze permutabili; in virtù del teorema (3.44), una varietà $\mathfrak{V}$ è a congruenze permutabili se e solo se $\mathfrak{P} \leq \mathfrak{V}$, dove $\mathfrak{P}$ è la varietà con una operazione ternaria m assiomatizzata dalle equazioni del teorema. Inoltre, la condizione di Mal'cev per la permutabilità è anche forte, visto che
$$\mathfrak{K}_{\mathfrak{P}} = \bigcup\{[\mathfrak{V}] \mid \mathfrak{P} \leq \mathfrak{V}\};$$
2. la classe $\mathfrak{K}_{\mathfrak{M}}$ delle varietà a congruenze modulari, visto che, dal teorema (3.49), una varietà $\mathfrak{V}$ è a congruenze permutabili se e solo se esiste un k tale che $\mathfrak{M}_k \leq \mathfrak{V}$, dove $\mathfrak{M}_k$ è la varietà con $k+1$ operazioni quaternarie che soddisfano le equazioni del teorema per $n = k$. In questo caso,
$$\mathfrak{K}_{\mathfrak{M}} = \bigcup\{[\mathfrak{V}] \mid \exists k > 0 \text{ tale che } \mathfrak{M}_k \leq \mathfrak{V}\};$$
3. la classe $\mathfrak{K}_{\mathfrak{D}}$ delle varietà a congruenze distributive, perché, dal teorema (3.47), una varietà $\mathfrak{V}$ è a congruenze distributive se e solo se esiste un k tale che $\mathfrak{D}_k \leq \mathfrak{V}$, dove $\mathfrak{D}_k$ è la varietà con $k+1$ operazioni ternarie che soddisfano le equazioni del teorema per $n = k$. Si ha, perciò,
$$\mathfrak{K}_{\mathfrak{D}} = \bigcup\{[\mathfrak{V}] \mid \exists k > 0 \text{ tale che } \mathfrak{D}_k \leq \mathfrak{V}\};$$
4. la classe $\mathfrak{K}_{\mathfrak{R}}$ delle varietà a congruenze regolari; come per i precedenti esempi, invochiamo il teorema (3.51) per ricordare come una varietà $\mathfrak{V}$ è a congruenze regolari se e solo se esiste un k tale che $\mathfrak{R}_k \leq \mathfrak{V}$, dove $\mathfrak{R}_k$ è la varietà con k operazioni ternarie e k operazioni quaternarie che soddisfano le equazioni del teorema per $n = k$. Quindi,
$$\mathfrak{K}_{\mathfrak{R}} = \bigcup\{[\mathfrak{V}] \mid \exists k > 0 \text{ tale che } \mathfrak{R}_k \leq \mathfrak{V}\}.$$

Enunciamo, per completezza, un risultato che caratterizza le classi di Mal'cev, la cui dimostrazione si trova in [16]

Teorema 4.22 (W. Taylor). *Per una classe $\mathfrak{K}$ di varietà sono equivalenti:*

(1) $\mathfrak{K} = \bigcup \mathfrak{F}$, *dove $\mathfrak{F}$ è un filtro di Mal'cev;*

(2) *per ogni coppia di varietà $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$*

- **(a)** *se $\mathfrak{V} \leq \mathfrak{W}$ e $\mathfrak{V} \in \mathfrak{K}$, allora $\mathfrak{W} \in \mathfrak{K}$;*
- **(b)** *se $\mathfrak{V}, \mathfrak{W} \in \mathfrak{K}$, allora $\mathfrak{V} \otimes \mathfrak{W} \in \mathfrak{K}$;*
- **(c)** *se $\mathfrak{W} \in \mathfrak{K}$ allora esiste una varietà finitamente assiomatizzabile di tipo finito $\mathfrak{V} \in \mathfrak{K}$ tale che $\mathfrak{V} \in \mathfrak{W}$.*

4.4 Primalità di alcuni filtri di $\mathfrak{L}$

Studiamo adesso la primalità di alcuni filtri di Mal'cev introdotti nel capitolo precedente. Cominciamo però da un filtro molto semplice e significativo, che mette in luce come si possa giungere ad esibire la primalità attraverso ragionamenti alternativi alla manipolazione di termini.

Lemma 4.23 (H.P. Gumm, [7]). *Per una varietà $\mathfrak{V}$ sono equivalenti:*

(1) *se $\mathbf{A} \in \mathfrak{V}$ allora ogni automorfismo involutivo di $\mathbf{A}$ ha un punto fisso, ovvero se φ è un automorfismo di $\mathbf{A}$ tale che $\varphi^2 = \mathrm{id}_A$, allora esiste un $a \in A$ tale che $\varphi(a) = a$;*

(2) *$\mathfrak{V}$ possiede un termine binario s tale che*

$$\mathfrak{V} \models s(x,y) \approx s(y,x).$$

Dimostrazione. Supponiamo che il termine binario esista; sia $\mathbf{A} \in \mathfrak{V}$, φ un automorfismo involutivo di $\mathbf{A}$ e $a \in A$. Allora,

$$\begin{aligned} \varphi(s(a,\varphi(a))) &= s(\varphi(a), \varphi^2(a)) \\ &= s(\varphi(a), a) \\ &= s(a, \varphi(a)), \end{aligned}$$

cioè $s(a, \varphi(a))$ è un punto fisso di φ.

Viceversa, supponiamo che ogni automorfismo involutivo di ogni algebra di $\mathfrak{V}$ abbia un punto fisso, e sia $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\mathfrak{V}}(x, y)$ l'algebra libera su due generatori di $\mathfrak{V}$ (come in precedenza, possiamo supporre che esista altrimenti $\mathfrak{V}$ sarebbe banale e ogni termine ubbidirebbe a qualsiasi equazione); sia φ l'automorfismo di $\mathbf{F}$ che scambia i generatori:

$$\varphi(x) = y \quad \text{e} \quad \varphi(y) = x.$$

Tale automorfismo è banalmente involutivo e quindi ha un punto fisso, cioé esiste un $u \in \mathbf{F}$ tale che $u = \varphi(u)$: dunque esiste un termine binario s tale che $u = s^{\mathbf{F}}(x, y)$, da cui segue che

$$\begin{aligned} s^{\mathbf{F}}(y, x) &= s^{\mathbf{F}}(\varphi(x), \varphi(y)) \\ &= \varphi(s^{\mathbf{F}}(x, y)) \\ &= s^{\mathbf{F}}(x, y), \end{aligned}$$

quindi $\mathbf{F} \models s(x, y) \approx s(y, x)$ e, dal teorema (3.37), segue che

$$\mathfrak{V} \models s(x, y) \approx s(y, x).$$

□

Teorema 4.24. *Sia $\mathfrak{V}$ la varietà con un simbolo di operazione binaria s tale che $\mathfrak{V} = \mathrm{Mod}(\{s(x, y) \approx s(y, x)\})$. Allora, il filtro $\mathfrak{F} = \{[\mathfrak{W}] \mid \mathfrak{V} \leq \mathfrak{W}\}$ è un filtro di Mal'cev primo.*

Dimostrazione. Dalla definizione, è evidente che $\mathfrak{F}$ è un filtro di Mal'cev. Per dimostrare che è anche primo supponiamo che esistano due varietà $\mathfrak{U}, \mathfrak{W}$ tali che $\mathfrak{U} \oplus \mathfrak{W} \in \mathfrak{F}$ ma $\mathfrak{V} \not\leq \mathfrak{U}, \mathfrak{W}$. Dunque, esistono $\mathbf{U} \in \mathfrak{U}$ e $\mathbf{W} \in \mathfrak{W}$, e automorfismi involutivi φ, ψ, rispettivamente di $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$, senza punti fissi, ovvero tali che $\varphi(u) \neq u, \psi(w) \neq w$ per ogni $u \in U$, $w \in W$. Possiamo assumere che $|U| = |W|$ visto che, se così non fosse, si può dimostrare l'esistenza di un cardinale κ tale che le algebre $\mathbf{U}^{\kappa}$ e $\mathbf{W}^{\kappa}$ abbiano la stessa cardinalità; inoltre possiamo definire un automorfismo involutivo senza punti fissi su entrambe a partire da φ e ψ.

Possiamo dividere U in due sottoinsiemi disgiunti di uguale cardinalità U_1 e U_2 tali che $a \in U_1$ se e solo se $\varphi(a) \in U_2$; lo stesso possiamo fare per W, ottenendo W_1 e W_2. Dal fatto che $|U| = |W|$, segue che $|U_1| = |U_2| = |W_1| = |W_2|$, dunque possiamo trovare una biiezione $f : U \to W$ tale che, per ogni $u \in U$,

$$\varphi(u) = f^{-1}(\psi(f(u))).$$

Definiamo la nuova algebra $\overline{\mathbf{U}}$ il cui universo è l'insieme U, e il cui tipo è composto dai simboli di operazione di $\mathbf{U}$ e da un simbolo di operazione n-aria $Q^{\overline{\mathbf{U}}}$ per ogni simbolo di operazione n-aria $Q^{\mathbf{W}}$ di $\mathbf{W}$, tale che

$$Q^{\overline{\mathbf{U}}}(u_1, \ldots, u_n) \quad = \quad f^{-1}(Q^{\mathbf{W}}(f(u_1), \ldots, f(u_n))).$$

Chiaramente $\overline{\mathbf{U}} \in \mathfrak{U} \oplus \mathfrak{W}$, e φ, l'automorfismo involutivo senza punti fissi di $\mathbf{U}$, è un automorfismo involutivo senza punti fissi anche per $\overline{\mathbf{U}}$: basta infatti dimostrare che φ soddisfa le nuove operazioni introdotte.

$$\begin{aligned}
\varphi(Q^{\overline{\mathbf{U}}}(u_1, \ldots, u_n)) &= f^{-1}(\psi(f(Q^{\overline{\mathbf{U}}}(u_1, \ldots, u_n)))) \\
&= f^{-1}(\psi(f(f^{-1}(Q^{\mathbf{W}}(f(u_1), \ldots, f(u_n)))))) \\
&= f^{-1}(\psi(Q^{\mathbf{W}}(f(u_1), \ldots, f(u_n)))) \\
&= f^{-1}(Q^{\mathbf{W}}(\psi(f(u_1)), \ldots, \psi(f(u_n)))) \\
&= f^{-1}(Q^{\mathbf{W}}(f(\varphi(u_1)), \ldots, f(\varphi(u_n)))) \\
&= Q^{\overline{\mathbf{U}}}(\varphi(u_1), \ldots, \varphi(u_n)).
\end{aligned}$$

Dunque, abbiamo trovato un'algebra di $\mathfrak{U} \oplus \mathfrak{W}$ che ha un automorfismo involutivo senza punti fissi, il che è in contraddizione con l'ipotesi $\mathfrak{U} \oplus \mathfrak{W} \in \mathfrak{F}$. Perciò, o $\mathfrak{U} \in \mathfrak{F}$ o $\mathfrak{W} \in \mathfrak{F}$, da cui la primalità di $\mathfrak{F}$. $\square$

Teorema 4.25. *Il filtro di Mal'cev delle varietà a congruenze regolari è primo.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\mathfrak{V}$ e $\mathfrak{W}$ non siano a congruenze regolari; allora esistono due algebre $\mathbf{A} \in \mathfrak{V}$ e $\mathbf{B} \in \mathfrak{W}$, e due congruenze $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$ e $\psi \in \mathrm{Con}(\mathbf{B})$ che hanno una classe con esattamente un elemento e almeno una classe con più di un elemento. Sia $\kappa = \max\{|A|, |B|\}$, e definiamo una sottalgebra $\mathbf{C}$ di $\mathbf{A}^\kappa$ con universo

$$C = \{\alpha \in A^\kappa \mid \text{ per ogni } i, j < \kappa, (\alpha_i, \alpha_j) \in \theta\};$$

chiaramente $|C| = 2^\kappa$. La congruenza $\varphi \in \mathrm{Con}(\mathbf{C})$ definita come

$$(\alpha, \beta) \in \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad (\alpha_0, \beta_0) \in \theta$$

ha esattamente due classi di congruenza: una di cardinalità 1 e una di cardinalità 2^κ; se moltiplichiamo $\mathbf{C}$ con un'algebra di $\mathfrak{V}$ di cardinalità 2^κ, otteniamo un'algebra $\overline{\mathbf{C}} \in \mathfrak{V}$ con una congruenza $\overline{\varphi}$ che ha esattamente 2^κ classi di cardinalità 1 e 2^κ classi di cardinalità 2^κ. Con lo stesso ragionamento, si ottiene un'algebra $\overline{\mathbf{D}} \in \mathfrak{W}$ con una congruenza $\overline{\tau}$ che ha esattamente 2^κ classi di cardinalità 1 e 2^κ classi di cardinalità 2^κ. Ora, per una questione di cardinalità, esiste una biiezione $\lambda : \overline{C} \to \overline{D}$ che mappa $\overline{\varphi}$ in $\overline{\tau}$; possiamo quindi "estendere" il tipo di $\overline{\mathbf{C}}$, come nella dimostrazione del teorema (4.24), in modo da ottenere un'algebra di $\mathfrak{V} \oplus \mathfrak{W}$ che ha una congruenza con una classe che ha un solo elemento. Quindi $\mathfrak{V} \oplus \mathfrak{W}$ non è a congruenze regolari, e quindi segue la tesi. $\square$

Teorema 4.26 (S. Tschantz, [18])**.** *Il filtro di Mal'cev delle varietà a congruenze permutabili è primo.*

Nel prossimo capitolo dimostreremo la non primalità del filtro di Mal'cev delle varietà a congruenze distributive attraverso un argomento diverso da quello presente in [6], sebbene ivi accennato ma non investigato. Rivolgeremo poi la nostra attenzione alla congettura di Taylor e Garcìa.

Congettura 4.27 (W. Taylor - O.C. Garcìa, [6])**.** *Il filtro di Mal'cev delle varietà a congruenze modulari è primo.*

Capitolo 5

Omissione di reticoli da parte di varietà

In questo capitolo gettiamo le basi per il nuovo approccio alla congettura di Taylor e Garcìa. Si studierà inizialmente il problema dell'omissione di reticoli, esibendo una condizione sufficiente affinché la classe delle varietà che omettono un reticolo sia un filtro di $\mathfrak{L}$, ed una sua applicazione immediata alla primalità del filtro delle varietà a congruenze distributive. Dopodiché verranno fatte alcune osservazioni nel caso in cui il reticolo da omettere sia $\mathcal{N}_5$. Infine, si mostrerà un interessante sviluppo della problematica dell'omissione di reticoli.

5.1 Primalità del filtro delle varietà a congruenze distributive

Definizione 5.1. Siano $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$ due reticoli. Si dice che $\mathcal{M}$ *omette* $\mathcal{L}$ se

$$\mathcal{L} \ \notin \ \mathrm{S}(\mathcal{M}).$$

Osservazione 5.2. Un reticolo è modulare se e solo se omette $\mathcal{N}_5$, mentre un reticolo è distributivo se e solo se omette $\mathcal{N}_5$ e $\mathcal{M}_3$.

Definizione 5.3. Sia $\mathcal{L}$ un reticolo. Si dice che la classe di algebre $\mathfrak{K}$ *omette* $\mathcal{L}$ se, per ogni $\mathbf{A} \in \mathfrak{K}$, $\mathbf{Con}(\mathbf{A})$ omette $\mathcal{L}$.

La classe $[\mathfrak{V}]$ *omette* $\mathcal{L}$ se, per ogni $\mathfrak{W} \in [\mathfrak{V}]$, $\mathfrak{W}$ omette $\mathcal{L}$.

Teorema 5.4. *Se $\mathfrak{V}$ omette $\mathcal{L}$ e $\mathfrak{V}$ è interpretabile in $\mathfrak{W}$, allora $\mathfrak{W}$ omette $\mathcal{L}$.*

Dimostrazione. Sia σ il tipo di $\mathfrak{V}$ e δ il tipo di $\mathfrak{W}$. Se $\mathfrak{V}$ è interpretabile in $\mathfrak{W}$ allora esiste una funzione che associa ad ogni $Q \in \sigma$ un termine $t_Q \in \mathbf{T}_\delta(\omega)$ tale che, per ogni $\mathbf{A} \in \mathfrak{W}$, $\Phi(\mathbf{A}) = \langle A, t_Q^{\mathbf{A}}(Q \in \sigma)\rangle$ sta in $\mathfrak{V}$. Dato che ogni $t_Q^{\mathbf{A}}$ è un elemento di $\mathrm{Clo}(\mathbf{A})$,

$$\mathbf{Con}(\mathbf{A}) \ \leq \ \mathbf{Con}(\Phi(\mathbf{A})),$$

in virtù del teorema (2.77). Ora, $\Phi(\mathbf{A}) \in \mathfrak{V}$, perciò $\mathcal{L} \notin \mathrm{S}(\mathbf{Con}(\Phi(\mathbf{A})))$, e dalla disuguaglianza precedente segue che $\mathcal{L} \notin \mathrm{S}(\mathbf{Con}(\mathbf{A}))$ per ogni $\mathbf{A} \in \mathfrak{W}$, cioé la tesi. □

Corollario 5.5. $[\mathfrak{V}]$ *omette $\mathcal{L}$ se e solo se $\mathfrak{V}$ omette $\mathcal{L}$.*

Dimostrazione. Ovvio, in base al teorema precedente. □

Lemma 5.6. *Se $\mathbf{C} \in \mathfrak{V} \otimes \mathfrak{W}$ e $\mathbf{C} \cong \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ come nel teorema (4.15), allora*

$$\mathbf{Con}(\mathbf{C}) \cong \mathbf{Con}(\mathbf{A}) \times \mathbf{Con}(\mathbf{B}).$$

Dimostrazione. Ovviamente, l'isomorfismo cercato è quello che associa al kernel di ogni omomorfismo γ di $\mathbf{C}$ la coppia di congruenze $\ker(\alpha)$ e $\ker(\beta)$ tali che $\gamma = \alpha \times \beta$:

$$\varphi(\ker(\gamma)) = (\ker(\alpha), \ker(\beta)).$$

Tale funzione è infatti banalmente suriettiva: basta associare ad ogni coppia (ψ, θ) il kernel della funzione $\pi_\psi \times \pi_\theta$, dove $\ker(\pi_\psi) = \psi$ e $\ker(\pi_\theta) = \theta$. Riguardo l'iniettività, supponiamo $\varphi(\ker(\gamma)) = \varphi(\ker(\overline{\gamma}))$. Quindi

$$(\ker(\alpha)), \ker(\beta)) = (\ker(\overline{\alpha}), \ker(\overline{\beta})),$$

perciò $\ker(\alpha) = \ker(\overline{\alpha})$ e $\ker(\beta) = \ker(\overline{\beta})$, dunque lo stesso vale per gli omomorfismi: $\alpha \equiv \overline{\alpha}$ e $\beta \equiv \overline{\beta}$; ma allora

$$\alpha \times \beta \equiv \overline{\alpha} \times \overline{\beta},$$

dato che agiscono componente per componente. Questo implica $\ker(\gamma) = \ker(\overline{\gamma})$.

Facciamo vedere che tale funzione rispetta l'ordine in entrambe le direzioni: potremo così concludere, in base al teorema (2.29), che si tratta di un isomorfismo tra reticoli. Innanzitutto, notiamo come ogni elemento $x \in \mathbf{C}$ possa essere scritto a meno di isomorfismi, in base alla decomposizione, come $(x_\mathbf{A}, x_\mathbf{B})$, con $x_\mathbf{A} \in \mathbf{A}$ e $x_\mathbf{B} \in \mathbf{B}$. Di conseguenza sia θ una congruenza di $\mathbf{C}$ e $\varphi(\theta) = (\theta_\mathbf{A}, \theta_\mathbf{B})$; allora

$$\begin{aligned} \langle (x_\mathbf{A}, x_\mathbf{B}), (y_\mathbf{A}, y_\mathbf{B}) \rangle \in \theta \quad &\iff \quad (x_\mathbf{A}, x_\mathbf{B})/\theta = (y_\mathbf{A}, y_\mathbf{B})/\theta \\ &\iff \quad (x_\mathbf{A}/\theta_\mathbf{A}, x_\mathbf{B}/\theta_\mathbf{B}) = (y_\mathbf{A}/\theta_\mathbf{A}, y_\mathbf{B}/\theta_\mathbf{B}) \\ &\iff \quad x_\mathbf{A}/\theta_\mathbf{A} = y_\mathbf{A}/\theta_\mathbf{A} \text{ e } x_\mathbf{B}/\theta_\mathbf{B} = y_\mathbf{B}/\theta_\mathbf{B} \\ &\iff \quad (x_\mathbf{A}, y_\mathbf{A}) \in \theta_\mathbf{A} \text{ e } (x_\mathbf{B}, y_\mathbf{B}) \in \theta_\mathbf{B}. \end{aligned}$$

La seconda equivalenza segue dal fatto che

$$\begin{aligned} (x_\mathbf{A}, x_\mathbf{B})/\theta &= \pi_\theta(x_\mathbf{A}, x_\mathbf{B}) \\ &= (\pi_{\theta_\mathbf{A}}(x_\mathbf{A}), \pi_{\theta_\mathbf{B}}(x_\mathbf{B})) \\ &= (x_\mathbf{A}/\theta_\mathbf{A}, x_\mathbf{B}/\theta_\mathbf{B}). \end{aligned}$$

Ne consegue che

$$\begin{aligned} \theta \leq \psi \quad &\iff \quad \theta_\mathbf{A} \leq \psi_\mathbf{A} \text{ e } \theta_\mathbf{B} \leq \psi_\mathbf{B} \\ &\iff \quad (\theta_\mathbf{A}, \theta_\mathbf{B}) \leq (\psi_\mathbf{A}, \psi_\mathbf{B}) \\ &\iff \quad \varphi(\theta) \leq \varphi(\psi). \end{aligned}$$

□

Il lemma precedente ci dà un indizio su quale possa essere una condizione sufficiente affinché la classe dei tipi di interpretabilità che omettono $\mathcal{L}$ sia un filtro: concentriamoci sulla rappresentazione sottodiretta di un reticolo.

Lemma 5.7. *Siano $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ tre reticoli tali che $\mathcal{L} \leq \mathcal{M} \times \mathcal{N}$. Allora $\mathcal{L}$ è un prodotto sottodiretto di $\mathcal{M}_i$ e $\mathcal{N}_i$, per certi $\mathcal{M}_i \leq \mathcal{M}$ e $\mathcal{N}_i \leq \mathcal{N}$.*

Dimostrazione. Gli epimorfismi canonici di $\mathcal{L}$ in $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$, definiti per ogni $\langle a, b\rangle \in \mathcal{L}$ come

$$\begin{aligned} \pi_{\mathcal{M}}(\langle a, b\rangle) &= a, \\ \pi_{\mathcal{N}}(\langle a, b\rangle) &= b, \end{aligned}$$

hanno come immagini omomorfe di $\mathcal{L}$ due sottoreticoli di $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$, detti $\mathcal{M}_i$ e $\mathcal{N}_i$. Dato che ovviamente $\mathcal{L} \leq \mathcal{M}_i \times \mathcal{N}_i$, $\pi_{\mathcal{M}}(\mathcal{L}) = \mathcal{M}_i$ e $\pi_{\mathcal{N}}(\mathcal{L}) = \mathcal{N}_i$, si ha la tesi. $\square$

Corollario 5.8. *Siano $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ tre reticoli tali che $\mathcal{L}$ sia sottodirettamente irriducibile e che $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ omettano $\mathcal{L}$. Allora $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ omette $\mathcal{L}$.*

Dimostrazione. Se $\mathcal{L} \in \mathrm{S}(\mathcal{M} \times \mathcal{N})$ tramite l'isomorfismo φ, allora, dal lemma (5.7) si avrebbe che $\varphi(\mathcal{L})$ è un prodotto sottodiretto di $\mathcal{M}_i$ e $\mathcal{N}_i$, per certi $\mathcal{M}_i \leq \mathcal{M}$ e $\mathcal{N}_i \leq \mathcal{N}$, dunque

$$\mathcal{L} \hookrightarrow \mathcal{M}_i \times \mathcal{N}_i,$$

e tale rappresentazione sottodiretta è non banale, visto che né $\mathcal{M}_i$ né $\mathcal{N}_i$ possono essere isomorfi a $\mathcal{L}$, dall'ipotesi $\mathcal{L} \notin \mathrm{S}(\mathcal{M}), \mathrm{S}(\mathcal{N})$. Ma questo è assurdo. $\square$

Teorema 5.9. *Se $\mathcal{L}$ è sottodirettamente irriducibile e $\mathfrak{V}$ e $\mathfrak{W}$ omettono $\mathcal{L}$, allora $\mathfrak{V} \otimes \mathfrak{W}$ omette $\mathcal{L}$.*

Dimostrazione. Dal lemma (5.6), il reticolo delle congruenze di ogni algebra di $\mathfrak{V} \otimes \mathfrak{W}$ è isomorfo al prodotto dei reticoli di congruenze di un'algebra di $\mathfrak{V}$ e un'algebra di $\mathfrak{W}$. Perciò, dal corollario (5.8), dato che entrambi questi reticoli omettono $\mathcal{L}$ e questo è sottodirettamente irriducibile, si ha la tesi. $\square$

Corollario 5.10. *Se $\mathcal{L}$ è sottodirettamente irriducibile, allora*

$$\mathfrak{F}(\mathcal{L}) \;=\; \{[\mathfrak{V}] \in \mathfrak{L} \mid [\mathfrak{V}] \text{ omette } \mathcal{L}\}$$

è un filtro nel reticolo dei tipi di interpretabilità $\mathfrak{L}$.

Dimostrazione. Dal teorema (5.4), per ogni $[\mathfrak{V}] \in \mathfrak{F}(\mathcal{L})$, se $[\mathfrak{V}] \leq [\mathfrak{W}]$ allora $[\mathfrak{W}]$ omette $\mathcal{L}$, quindi $[\mathfrak{W}] \in \mathfrak{F}(\mathcal{L})$. Invece, dal teorema (5.9), se $[\mathfrak{V}]$ e $[\mathfrak{W}]$ stanno in $\mathfrak{F}(\mathcal{L})$ allora anche $[\mathfrak{V}] \vee [\mathfrak{W}] = [\mathfrak{V} \otimes \mathfrak{W}]$ omette $\mathcal{L}$, quindi $[\mathfrak{V}] \vee [\mathfrak{W}] \in \mathfrak{F}(\mathcal{L})$. $\square$

Guardiamo dunque una applicazione dei risultati ottenuti. Se $\{\mathcal{L}_i\}_{i=1}^n$ è una famiglia di reticoli sottodirettamente irriducibili allora è ovvio come

$$\mathfrak{F}(\{\mathcal{L}_i\}_{i=1}^n) = \bigcap_{i=1}^n \{[\mathfrak{V}] \in \mathfrak{L} \mid [\mathfrak{V}] \text{ omette } \mathcal{L}_i\}$$

sia un filtro. Perciò, prendiamo $n = 2$, $\mathcal{L}_1 = \mathcal{N}_5$ e $\mathcal{L}_2 = \mathcal{M}_3$. Ovviamente, esistono varietà che omettono $\mathcal{N}_5$ ma non $\mathcal{M}_3$ (non tutte le varietà a congruenze modulari sono anche a congruenze distributive), mentre per il viceversa citiamo il seguente risultato, presente in [5]

Teorema 5.11 (D. Papert)**.** *La varietà dei semireticoli omette $\mathcal{M}_3$ ma non $\mathcal{N}_5$.*

Teorema 5.12. *Il filtro $\mathfrak{F}(\{\mathcal{N}_5, \mathcal{M}_3\})$ non è primo.*

Dimostrazione. Per quanto detto,

$$\mathfrak{F}(\{\mathcal{N}_5, \mathcal{M}_3\}) = \mathfrak{F}(\mathcal{N}_5) \cap \mathfrak{F}(\mathcal{M}_3)$$

ed esistono due varietà $\mathfrak{V}$ e $\mathfrak{W}$ tali che $[\mathfrak{V}] \in \mathfrak{F}(\mathcal{N}_5)\backslash\mathfrak{F}(\{\mathcal{N}_5, \mathcal{M}_3\})$ e $[\mathfrak{W}] \in \mathfrak{F}(\mathcal{M}_3)\backslash\mathfrak{F}(\{\mathcal{N}_5, \mathcal{M}_3\})$, dunque $\mathfrak{F}(\{\mathcal{N}_5, \mathcal{M}_3\})$ non è irriducibile, perciò in base all'osservazione (4.19), neanche primo. □

Corollario 5.13. *Il filtro delle varietà a congruenze distributive non è primo.*

Possiamo perciò riformulare alla maniera seguente la congettura di Taylor e Garcìa.

Congettura 5.14. *Il filtro $\mathfrak{F}(\mathcal{N}_5)$ è primo.*

Questa riformulazione apre la strada ad un nuovo indirizzo di ricerca: se si è in grado di esibire una proprietà di $\mathcal{N}_5$ che garantisce a $\mathfrak{F}(\mathcal{N}_5)$ di essere primo (un pò come si è scovata la sottodiretta irriducibilità per dimostrare che tale classe è un filtro), allora la congettura di Taylor e Garcìa è dimostrata. E' d'altronde possibile anche la strada opposta: scovare, tra le proprietà di $\mathcal{N}_5$, una che provi la riducibilità di $\mathfrak{F}(\mathcal{N}_5)$. Ma desideriamo essere più precisi. Siano $\mathfrak{V}$ e $\mathfrak{W}$ due varietà di tipo σ e δ rispettivamente, e sia A un insieme. Se τ è un tipo, indichiamo con

$[A]^\tau$ un'algebra con universo A e tipo τ (qualora sia possibile definire su A delle operazioni di tipo τ). Dalla definizione di coprodotto di due varietà,

$$[A]^{\sigma\cup\delta} \in \mathfrak{V} \oplus \mathfrak{W} \iff [A]^\sigma \in \mathfrak{V} \text{ e } [A]^\delta \in \mathfrak{W},$$

intendendo con operazioni di tipo $\sigma \cup \delta$ su A esattamente quelle di $[A]^\sigma$ e di $[A]^\delta$, e viceversa; d'altronde,

$$\mathrm{Con}([A]^{\sigma\cup\delta}) = \mathrm{Con}([A]^\sigma) \cap \mathrm{Con}([A]^\delta);$$

ci si chiede dunque: tra le proprietà di $\mathcal{N}_5$, ce n'è una che, nel caso in cui $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$ e $\mathcal{M}$ ometta $\mathcal{N}_5$, garantisca che $\mathcal{M}_1$ omette $\mathcal{N}_5$ o $\mathcal{M}_2$ omette $\mathcal{N}_5$?

Purtroppo, non si è stati in grado di esibire nessuna proprietà con le conseguenze sopra citate, e non sembra affatto ovvio che ve ne siano; le difficoltà di questa congettura sembrano quindi essere un invariante rispetto all'approccio adottato (sia esso sintattico, vedi [14], che secondo l'omissione di reticoli). Ci si è perciò domandati se non sia opportuno cambiare completamente punto di vista nell'affrontare la questione; il tentativo di ricollare la problematica in un nuovo tipo di contesto è lo scopo perseguito nella sezione successiva.

5.2 Considerazioni sul rapporto tra intepretazione e congruenze

La prossima definizione sarà motivata in seguito dal teorema (5.18).

Definizione 5.15. Sia κ un cardinale e $\mathfrak{V}$ una varietà. Si definisce

$$\mathfrak{V}|_\kappa = \{\mathbf{A} \in \mathfrak{V} \mid |\mathbf{A}| \leq \kappa\}.$$

Osservazione 5.16. Dalla definizione, sono evidenti i seguenti fatti:

1. se $\kappa \leq \lambda$ allora $\mathfrak{V}|_\kappa \subseteq \mathfrak{V}|_\lambda$;

2. per ogni cardinale κ,

$$\mathrm{H}(\mathfrak{V}|_\kappa) = \mathfrak{V}|_\kappa \quad \text{e} \quad \mathrm{S}(\mathfrak{V}|_\kappa) = \mathfrak{V}|_\kappa;$$

3.

$$\mathfrak{V} = \bigcup_{\kappa \text{ card}} \mathfrak{V}|_\kappa;$$

4. per ogni cardinale λ,

$$\mathfrak{V} = \bigcup_{\kappa \geq \lambda} \mathfrak{V}|_\kappa .$$

Dimostrazione. Discendono tutte banalmente dalla definizione. □

Proposizione 5.17. *Per una varietà $\mathfrak{V}$ sono equivalenti:*

(1) *$\mathfrak{V}$ omette $\mathcal{L}$;*

(2) *per ogni cardinale κ, $\mathfrak{V}|_\kappa$ omette $\mathcal{L}$;*

(3) *esiste un cardinale λ tale che, per ogni $\kappa \geq \lambda$, $\mathfrak{V}|_\kappa$ omette $\mathcal{L}$.*

Dimostrazione. Ovviamente, se $\mathfrak{V}$ omette $\mathcal{L}$ allora ogni $\mathfrak{V}|_\kappa$ lo omette. Viceversa se $\mathfrak{V}$ non omettesse $\mathcal{L}$, supponiamo a causa di $\mathbf{A} \in \mathfrak{V}$ tale che $|A| = \lambda$, allora, per ogni $\kappa \geq \lambda$, si avrebbe che $\mathfrak{V}|_\kappa$ non omette $\mathcal{L}$, contro l'ipotesi. Quindi (1) e (2) sono equivalenti.

Se esiste un cardinale λ tale che, per ogni $\kappa \geq \lambda$, $\mathfrak{V}|_\kappa$ omette $\mathcal{L}$ allora dall'osservazione (5.16) anche tutte le $\mathfrak{V}|_\alpha$ con $\alpha < \lambda$ lo omettono. Essendo il viceversa ovvio, (2) è equivalente a (3). □

Il seguente risultato, riportato in [11], è la chiave di volta dei ragionamenti successivi: dunque, d'ora in poi, $\mathfrak{V}$ e $\mathfrak{W}$ saranno due varietà che soddisfano l'ipotesi (1) del prossimo teorema. A nostro avviso, il reticolo dei tipi di interpretabilità subisce modificazioni solo marginali e, ad ogni modo, varietà definite da classi di equazioni sono qualcosa di veramente esotico.

Teorema 5.18 (W.D. Neumann)**.** *Se $\mathfrak{V}$ è una varietà, allora sono equivalenti:*

(1) *$\mathfrak{V}$ è definibile da un insieme di operazioni;*

(2) $\mathfrak{V}$ *ammette un'algebra libera per ogni insieme di generatori, ed esiste un cardinale* λ *tale che per ogni insieme* X *tale che* $|X| \geq \lambda$ *si ha*

$$|\mathbf{F}_{\mathfrak{V}}(X)| = |X|.$$

Per ogni varietà $\mathfrak{V}$ che soddisfa (1), indicheremo il cardinale cui si riferisce il punto (2) del teorema precedente come $m_{\mathfrak{V}}$. Inoltre, ogni varietà verrà considerata non banale (ovvero $[\mathfrak{V}] < \nabla_{\mathfrak{L}}$), visto che le varietà banali omettono ogni reticolo ad eccezione di quello formato da un solo elemento (che non ci interessa).

Viene naturale chiedersi se il fatto che ogni algebra libera ometta un reticolo comporti che la varietà intera lo ometta, giacché una varietà soddisfa una equazione se e solo se la soddisfano tutte le sue algebre libere. Il seguente risultato ci dice che la domanda ha risposta affermativa.

Teorema 5.19. *Se* $\kappa \geq m_{\mathfrak{V}}$*, allora*

$$\mathfrak{V}|_{\kappa} \ \text{ omette } \mathcal{L} \iff \mathbf{Con}(\mathbf{F}_{\mathfrak{V}}(\kappa)) \text{ omette } \mathcal{L}.$$

Dimostrazione. Se $\kappa \geq m_{\mathfrak{V}}$ allora $|\mathbf{F}_{\mathfrak{V}}(\kappa)| = \kappa$ per il teorema (5.18), perciò $\mathbf{F}_{\mathfrak{V}}(\kappa) \in \mathfrak{V}|_{\kappa}$. In base a questa premessa, è ovvia l'implicazione

$$\mathfrak{V}|_{\kappa} \ \text{ omette } \mathcal{L} \Rightarrow \mathcal{L} \notin \mathrm{S}(\mathbf{Con}(\mathbf{F}_{\mathfrak{V}}(\kappa))).$$

Viceversa, sfruttando il lemma (3.40), per ogni $\mathbf{A} \in \mathfrak{V}|_{\kappa}$ si ha $\mathbf{A} \in \mathrm{H}(\mathbf{F}_{\mathfrak{V}}(\kappa))$, ovvero esiste $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{F}_{\mathfrak{V}}(\kappa))$ tale che

$$\mathbf{A} \cong \mathbf{F}_{\mathfrak{V}}(\kappa)/\theta.$$

Dal teorema (2.76), dunque

$$\mathbf{Con}(\mathbf{A}) \cong \mathbf{Con}(\mathbf{F}_{\mathfrak{V}}(\kappa)/\theta) \cong \mathbf{I}[\theta, \nabla_{\mathbf{F}_{\mathfrak{V}}(\kappa)}],$$

perciò $\mathbf{Con}(\mathbf{A})$ è un sottoreticolo di $\mathbf{Con}(\mathbf{F}_{\mathfrak{V}}(\kappa))$, quindi $\mathbf{Con}(\mathbf{A})$ omette $\mathcal{L}$ per ogni $\mathbf{A} \in \mathfrak{V}|_{\kappa}$. □

Il prossimo teorema affronta la questione di determinare quale rapporto intercorre tra i reticoli delle congruenze delle algebre di libere sullo stesso numero di generatori di due varietà $\mathfrak{V}$ e $\mathfrak{W}$ tali che $\mathfrak{V} \leq \mathfrak{W}$.

Teorema 5.20. *Se $\mathfrak{V} \leq \mathfrak{W}$, allora, per ogni $\kappa \geq m_{\mathfrak{V}}, m_{\mathfrak{W}}$,*

$$\mathbf{Con}(\mathbf{F}_{\mathfrak{W}}(\kappa)) \quad \in \quad \mathrm{S}(\mathbf{Con}(\mathbf{F}_{\mathfrak{V}}(\kappa))).$$

Dimostrazione. Se $\mathfrak{V}$ è interpretabile in $\mathfrak{W}$ via l'intepretazione Φ, allora $\Phi(\mathbf{F}_{\mathfrak{W}}(\kappa)) \in \mathfrak{V}$. Dato che l'insieme di base di $\Phi(\mathbf{F}_{\mathfrak{W}}(\kappa))$ è lo stesso di $\mathbf{F}_{\mathfrak{W}}(\kappa)$, si ha che

$$|\Phi(\mathbf{F}_{\mathfrak{W}}(\kappa))| = |F_{\mathfrak{W}}(\kappa)| = \kappa$$

da cui $\Phi(\mathbf{F}_{\mathfrak{W}}(\kappa)) \in \mathfrak{V}|_{\kappa}$, perciò $\Phi(\mathbf{F}_{\mathfrak{W}}(\kappa)) \in \mathrm{H}(\mathbf{F}_{\mathfrak{V}}(\kappa))$, il che, dal teorema (2.76), implica

$$\mathbf{Con}(\Phi(\mathbf{F}_{\mathfrak{W}}(\kappa))) \in \mathrm{S}(\mathbf{Con}(\mathbf{F}_{\mathfrak{V}}(\kappa))).$$

Ma, d'altronde, come abbiamo osservato nella dimostrazione del teorema (5.4),

$$\mathbf{Con}(\mathbf{F}_{\mathfrak{W}}(\kappa)) \quad \leq \quad \mathbf{Con}(\Phi(\mathbf{F}_{\mathfrak{V}}(\kappa))),$$

da cui segue la tesi. □

Unendo i due risultati precedenti, abbiamo perciò come corollario immediato il teorema (5.4). Il seguente corollario è, tuttavia, sorprendente.

Corollario 5.21. *Per ogni $\kappa \geq m_{\mathfrak{V}}$,*

$$\mathbf{Con}(\mathbf{F}_{\mathfrak{V}}(\kappa)) \in \mathrm{S}(\mathbf{Con}(\mathbf{F}_{\mathfrak{Sets}}(\kappa))).$$

Dimostrazione. Segue banalmente dal teorema precedente, dal fatto che $\mathfrak{Sets}$ è interpretabile in ogni varietà e dal fatto che per ogni cardinale κ (infinito o meno) $|\mathbf{F}_{\mathfrak{Sets}}(\kappa)| = \kappa$, dato che non ci sono operazioni in $\mathfrak{Sets}$. □

5.3 Conclusioni

L'ultimo corollario ci dice che il reticolo delle equivalenze di un insieme di cardinalità κ contiene, come copie isomorfe, i reticoli delle congruenze delle algebre libere di cardinalità κ di tutte le varietà $\mathfrak{V}$ tali per cui $\kappa \geq m_{\mathfrak{V}}$. In virtù del teorema (5.19), ciò significa che, se A è un insieme di cardinalità κ, il reticolo $\mathbf{Sub}(\mathbf{Eq}(A))$

contiene una parte del filtro delle varietà che omettono $\mathcal{L}$, ma a testa in giù (vedi il teorema (5.20)).

Ci si chiede dunque se, per ogni cardinale κ, non sia possibile che, nel reticolo dei sottouniversi del reticolo delle equivalenze di un insieme di cardinalità κ, l'insieme di tutti i reticoli che omettono $\mathcal{L}$ sia un ideale, e che la primalità di tale ideale, ovviamente per ogni κ, implichi la primalità del filtro dei tipi di interpretabilità che omettono $\mathcal{L}$. Ciò non sembra impossibile, date le relazioni che legano i reticoli delle congruenze delle algebre di $\mathfrak{V}$ e $\mathfrak{W}$ con quelli delle algebre di $\mathfrak{V} \otimes \mathfrak{W}$ e $\mathfrak{V} \oplus \mathfrak{W}$ (vedi capitolo 5.1). Se si riuscisse a dimostrare questo fatto, si sposterebbe la questione in un ambiente più ricco di proprietà e molto più studiato del reticolo dei tipi di interpretabilità, aumentando decisamente le probabilità di dirimere una volta per tutte la questione.

Bibliografia

[1] G. Birkhoff. On the structure of abstract algebras. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 31:433–454, 1935.

[2] S. Burris and H.P. Sankappanavar. *A Course in Universal Algebra.* Graduate Texts in Mathematics, Vol. 78. New York - Heidelberg Berlin: Springer-Verlag. XVI, 276 p., 1981.

[3] A. Day. A characterization of modularity for congruence lattices of algebras. *Can. Math. Bull.*, 12:167–173, 1969.

[4] R. Dedekind. On the decomposition of numbers by means of their greatest common divisors. (Ueber Zerlegungen von Zahlen durch ihre grössten gemeinsamen Teiler.). *Braunschw. Festschr.*, pages 1–40, 1897.

[5] R. Freese and J.B. Nation. Congruence lattices of semilattices. *Pac. J. Math.*, 49:51–58, 1973.

[6] O.C. Garcia and W. Taylor. The lattice of interpretability types of varieties. *Mem. Am. Math. Soc.*, 305:125 p., 1984.

[7] H. P. Gumm. Mal'cev conditions in sums of varieties and a new Mal'cev condition. *Algebra Univers.*, 5:56–64, 1975.

[8] B. Jònsson. Algebras whose congruence lattices are distributive. *Math. Scand.*, 21:110–121, 1967.

[9] A.I. Mal'cev. On the general theory of algebraic systems. *Math. Sbornik*, 35:3–20, 1954.

[10] Ralph N. McKenzie, George F. McNulty, and Walter F. Taylor. *Algebras, lattices, varieties. Volume I.* The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series. Monterey, California: Wadsworth & Brooks/Cole Advance Books & Software. XII, 361 p., 1987.

[11] W.D. Neumann. On cardinalities of free algebras and ranks of operations. *Arch. Math.*, 20:132–133, 1969.

[12] W.D. Neumann. On Malcev conditions. *J. Austral. Math. Soc.*, 17:376–384, 1974.

[13] A.F. Pixley. Distributivity and permutability of congruence relations in equational classes of algebras. *Proc. Am. Math. Soc.*, 14:105–109, 1963.

[14] L. Sequeira. *Maltsev Filters.* PhD thesis, Faculdade de Ciencias da Universidade de Lisboa, 2001.

[15] A. Tarski. A remark on functionally free algebras. *Ann. Math.*, 2:163–165, 1946.

[16] W. Taylor. Characterizing Mal'cev conditions. *Algebra Univers.*, 3:351–397, 1973.

[17] W. Taylor. Some very weak identities. *Algebra Univers.*, 25:27–35, 1988.

[18] S. Tschantz. Congruence permutability is join prime. to appear.