

Übungsblatt 9

1. Es seien $\phi \in \Omega_p(U; \mathbb{R})$ und $\psi \in \Omega_{p-1}(U; \mathbb{R})$, wobei wie üblich $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen ist. Man beweise die *Greensche Formel*:

$$d(\psi \wedge * \phi) = d\psi \wedge (* \phi) + \psi \wedge (* \delta \phi) = \langle d\psi, \phi \rangle_p dV + \langle \psi, \delta \phi \rangle_{p-1} dV.$$

2. Für $\phi, \psi \in \Omega_p(U; \mathbb{R})$, zeige man folgenden Identitäten:

(a) $d(\delta \psi \wedge * \phi) = \langle d\delta \psi, \phi \rangle_p dV + \langle \delta \psi, \delta \phi \rangle_{p-1} dV.$

(b) $d(\psi \wedge * d\phi) = \langle d\psi, d\phi \rangle_{p-1} dV + \langle \psi, \delta d\phi \rangle_p dV.$

(c) $d(\delta \psi \wedge * \phi + \phi \wedge * d\psi) = \langle \delta \psi, \delta \phi \rangle_{p-1} dV + \langle \Delta \psi, \phi \rangle_p dV + \langle d\psi, d\phi \rangle_{p+1} dV.$

- (d) Für $p := 0$ und Funktionen f und g der Klasse C^∞ lautet (c):

$$d(f(*dg)) = (\Delta g) f dV + \langle df, dg \rangle_1 dV.$$

(e) $(\langle \Delta \psi, \phi \rangle_p - \langle \Delta \phi, \psi \rangle_p) dV = d(\delta \psi \wedge * \phi - \delta \phi \wedge * \psi + \phi \wedge * d\psi - \psi \wedge * d\phi).$

- (f) Für $p := 0$ und Funktionen f und g der Klasse C^∞ lautet (d):

$$((\Delta g) f - f(\Delta g)) dV = d(f(*dg) - g(*df)).$$

3. Es sei $j : T_x \rightarrow T_x^* = \Omega_1(U; \mathbb{R})$, $\frac{\partial}{\partial x} \mapsto dx$, $U \subseteq \mathbb{R}^k$, der kanonische Vektorraumisomorphismus zwischen Vektorfeldern und Pfaffschen Formen. Man zeige, dass für $f \in \Omega_0(U; \mathbb{R})$ und $X \in T_x$ gilt:

(a) $\operatorname{div} X = \delta j X = *d * j X.$

(b) $\operatorname{rot} X = j^{-1} * d j X.$

4. Man benutze die Definitionen von grad , div und rot durch Differentialformen, sowie die Eigenschaften der äußeren Ableitung d und der Co-ableitung δ , um folgende Identitäten der Vektoranalysis herzuleiten.

(a) $\operatorname{grad}(f \cdot g) = f \cdot \operatorname{grad} g + g \cdot \operatorname{grad} f.$

(b) $\operatorname{div}(f \cdot X) = f \cdot \operatorname{div} X + \langle \operatorname{grad} f, X \rangle.$

(c) $\operatorname{rot}(f \cdot X) = f \cdot \operatorname{rot} X + \operatorname{grad} f \times X.$

(d) $\operatorname{rot}(X \times Y) = (\operatorname{div} Y) \cdot X - (\operatorname{div} X) \cdot Y - [X, Y].$

(e) $\Delta(f \cdot g) = f \cdot \Delta g + g \cdot \Delta f + 2\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g \rangle.$