Differentialformen
Sommersemester 2018

PD Dr. Peter Massopust
13. Juni 2018

Übungsblatt 8

Die äußere Ableitung einer Differentialform $\omega \in \Omega_p(U;\mathbb{R})$, $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, der Klasse C^∞ ist eine Abbildung $d : \Omega_p(U;\mathbb{R}) \to \Omega_{p+1}(U;\mathbb{R})$. Zu d existiert eine Coabbildung

$$\delta : \Omega_p(U;\mathbb{R}) \to \Omega_{p-1}(U;\mathbb{R})$$

definiert durch

$$\delta\omega := \begin{cases} 0, & \omega \in \Omega_0(U;\mathbb{R}) \\ (-1)^{k(p+1)} * (d(*\omega)), & \omega \in \Omega_p(U;\mathbb{R}),\ p = 1,\dots,k. \end{cases}$$

Die Abbildung δ heißt auch *Coableitung (der Differentialform ω)*.

1. Man zeige folgende Eigenschaften der Coableitung.
   (a) $\delta\delta = 0$.
   (b) $*\delta d = d\delta *$.
   (c) $*d\delta = \delta d *$.
   (d) $d * \delta = \delta * d = 0$.
   (e) $\forall \omega \in \Omega_p(U;\mathbb{R}):\ *(\delta\omega) = (-1)^{p-1} d(*\omega)$ and $\delta(*\omega) = (-1)^p * (d\omega)$.

2. Sei $\omega := f\,dx + g\,dy + h\,dz$ eine Pfaffsche Form über dem $\mathbb{R}^3$, wobei $f, g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ Funktionen der Klasse C^∞ sind. Man zeige, daß
$$\delta\omega = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}$$
ist.

3. Zeige, daß die Coableitung einer Differentialform $\omega := \sum_{1\le i_1<\cdots<i_p\le k} f_{i_1\cdots i_p}\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$, $f_{i_1\cdots i_p} \in \Omega_0(U;\mathbb{R})$, gegeben ist durch
$$\delta\omega = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_p\le k} \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j-1} \frac{\partial f_{i_1\cdots i_p}}{\partial x_{i_j}}\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_{i_j}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}.$$

4. Betrachte die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\Delta := d\delta + \delta d : \Omega_p(U;\mathbb{R}) \to \Omega_p(U;\mathbb{R})$. Beweise:
   (a) $*\Delta = \Delta *$.
   (b) Für alle $f \in \Omega_0(U;\mathbb{R})$ gilt
   $$\Delta f = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

   Die Abbildung Δ heißt auch *Laplace-Beltrami Operator auf U.*