

Übungsblatt 7

1. Man zeige, daß die Bilinearformen $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ die durch Definition 68 gegeben sind, Skalarprodukte auf $A_p(V, \mathbb{R})$ sind und daß im Falle $p = n$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ mit dem gegebenen Skalarprodukt auf V zusammenfällt.
2. Es sei $V := \mathbb{R}^3$, versehen mit der kanonischen Orientierung. Für ein beliebig gegebenes $\phi \in A_2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ berechne man $*\phi$.
3. Sei V ein n -dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum mit fest gewähltem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und fest gewählter Orientierung. Sei $\{b_1, \dots, b_n\}$ irgendeine Basis von V und $\{b_1^*, \dots, b_n^*\}$ die dazugehörige Dualbasis. Des Weiteren bezeichne $j : V \rightarrow V^*$ den kanonischen Isomorphismus zwischen V und seinem algebraischen Dualraum V^* , der durch $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induziert wird. Man definiere

$$ds := \sum_{\nu=1}^n b_\nu b_\nu^*(\cdot) \in A_1(V, V),$$

und zeige daß $ds(v) = v$ ist, für alle $v \in V$.

Ferner sei

$$dF := *ds = \sum_{\nu=1}^n b_\nu (*b_\nu^*)(\cdot) \in A_{n-1}(V, V).$$

Man zeige, daß folgende Aussagen gelten.

- (a) $ds \wedge dF = n dV$,
- (b) $js = \langle v, ds \rangle$, für alle $v \in V$,
- (c) $*(js) = \langle v, dF \rangle$, für alle $v \in V$,
- (d) $*(js) = dV(v, \cdot, \dots, \cdot)$, für alle $v \in V$.