Differentialformen
Sommersemester 2018

PD Dr. Peter Massopust
16. Mai 2018

Übungsblatt 4

1. Es sei $f \in A_2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ gegeben durch
$$f = 6\, u_1 \wedge u_2 - 4\, u_2 \wedge u_3 + 3\, u_3 \wedge u_1$$
Man berechne den Wert von f auf den Vektoren $\xi := (1, 1, 2)^\top$ und $\eta := (-1, 0, 3)^\top$.

2. Man berechne den Wert der 1-Differentialform
$$\omega = (x_1 x_2 + x_3^2)\, dx_1 - (x_1 + x_3)^2\, dx_2 + (x_2^2 - x_3)\, dx_3$$
am Punkt $x := (1, -2, 1)$ auf dem Vektor $\xi := (-1, 3, -2)^\top$.

3. Man beweise: Für $\phi \in \Omega_p^{(n)}(U, \mathbb{R})$ und $\psi \in \Omega_q^{(n)}(U, \mathbb{R})$ ist $\phi \wedge \psi = (-1)^{pq} \psi \wedge \phi$. Insbesondere ist für $pq \in \mathbb{N}$ ungerade, $\phi \wedge \phi = 0$.

4. Es seien $G := \mathbb{R}$ und $H := F$ und $\Phi : F \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei Skalarmultiplikation. Ferner sei $f : U \subseteq E \to F$ eine Funktion der Klasse C^1 und $\omega \in \Omega_p^{(1)}(U, \mathbb{R})$. Man zeige:
$$d(f \cdot \omega) = (df) \wedge \omega + f \cdot d\omega.$$

5. Seien $E := \mathbb{R}^k$, $H := F := \mathbb{R}$, und sei $f : U \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ eine Funktion der Klasse C^1. Ferner bezeichne $\phi := dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p$, $p, k \in \mathbb{N}$, $p \leq k$, eine Differentialform der Klasse C^1. Man zeige:
   (a) $d\phi = 0$.
   (b) $d(f \cdot \phi) = (df) \wedge \phi$.
   (c) Für eine beliebige Differentialform $\omega \in \Omega_p^{(n)}(U, \mathbb{R})$,
$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq k} c_{i_1 \cdots i_p}\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p},$$
   wobei $c_{i_1 \cdots i_p}$ Funktionen der Klasse C^1 auf U sind, gilt daher:
$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq k} (dc_{i_1 \cdots i_p})\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq k} \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial c_{i_1 \cdots i_p}}{\partial x_i}\, dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}. \end{aligned}$$
   (d) Es bezeichne (x, y, z) das kanonische Koordinatensystem im $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie $d\omega$ falls $\omega := e^{xyz} dx \wedge dy - \sin(xy) dy \wedge dz + x^2 y z^3 dx \wedge dz$ ist.

6. Zeige:
$$dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \left(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{j_p}} \right) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \{i_1, \ldots, i_p\} \neq \{j_1, \ldots, j_p\}, \\ +1, & \text{falls } \{i_1, \ldots, i_p\} \text{ aus } \{j_1, \ldots, j_p\} \text{ durch eine gerade} \\ & \text{Anzahl von Vertauschungen hervorgeht,} \\ -1, & \text{falls } \{i_1, \ldots, i_p\} \text{ aus } \{j_1, \ldots, j_p\} \text{ durch eine ungerade} \\ & \text{Anzahl von Vertauschungen hervorgeht.} \end{cases}$$