

Übungsblatt 3

1. Eine Teilmenge U des \mathbb{R}^n heißt *zulässig*, wenn für jeden Punkt $x_0 := (x_{0,1}, \dots, x_{0,n}) \in U$ gilt: Sind $\Delta_1, \dots, \Delta_n : U \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0 stetige Funktionen und

$$\sum_{\nu=1}^n (x_\nu - x_{0,\nu}) \Delta_\nu(x) \equiv 0$$

auf U , so ist $\Delta_\nu(x_0) = 0, \forall \nu = 1, \dots, n$.

Man zeige, dass eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ in einem Punkt x_0 einer zulässigen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ genau dann differenzierbar ist, wenn es n reelle Funktionen $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ auf U gibt, die alle in x_0 stetig sind und in U der Gleichung

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{\nu=1}^n (x_\nu - x_{0,\nu}) \Delta_\nu(x)$$

genügen.

2. Man benutze obiges Resultat um Hilfssatz 42 zu beweisen.
3. Es sei $x_0 \in \mathbb{R}^m$. Man führe auf der Menge aller differenzierbaren Abbildungen

$$\{f \mid f : U \rightarrow \mathbb{R}^n, \text{ für eine Umgebung } U \text{ von } x_0\}$$

folgende Äquivalenzrelation ein:

$$f \sim g \iff \exists \text{ eine Umgebung } V \text{ von } x_0, \text{ so dass } f|_V = g|_V.$$

Die Äquivalenzklassen von \sim heißen *Keime* der Abbildung $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ um x_0 und man bezeichnet einen durch f repräsentierten Keim durch $f_{x_0} : (\mathbb{R}^m, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, y_0)$, wenn $y_0 := f(x_0)$ ist. Keime werden mittels geeigneter Repräsentanten zusammengesetzt. Ein *Funktionskeim* ist ein differenzierbarer Keim $(\mathbb{R}^m, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}, y_0)$. Die Menge aller Funktionskeime um x_0 werde mit \mathcal{C}_{x_0} bezeichnet. Man zeige:

- (a) Bezüglich der Addition, Multiplikation und Skalarmultiplikation auf Repräsentanten hat \mathcal{C}_{x_0} die Struktur einer reellen Algebra.
(b) Ein differenzierbarer Keim $f_{x_0} : (\mathbb{R}^m, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, y_0)$ definiert durch Zusammensetzen einen (kontravarianten) Algebromorphismus,

$$f^* : \mathcal{C}_{y_0} \rightarrow \mathcal{C}_{x_0}, \quad \phi_{y_0} \mapsto \phi_{y_0} \circ f_{x_0}, \quad y_0 = f(x_0).$$

- (c) Es gilt: $\text{id}^* = \text{id}$ und $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

4. Man zeige, dass $\mathfrak{m}_{x_0} := \{f_{x_0} \in \mathcal{C}_{x_0} \mid f_{x_0}(x_0) = 0\}$ das einzige maximale Ideal von \mathcal{C}_{x_0} ist.
5. Es sei $\mathfrak{m}_{x_0}^2$ das Ideal der Keime f_{x_0} , für welche die erste Ableitung in x_0 verschwindet. Der Quotientenvektorraum $T_{x_0}^* := \mathfrak{m}_{x_0} / \mathfrak{m}_{x_0}^2$ heißt der *Cotangentenraum von \mathbb{R}^n im Punkt x_0* . Man zeige, dass für $f \in \mathcal{C}_{x_0}$ gilt:

$$df(x_0) = (f - f(x_0)) \pmod{\mathfrak{m}_{x_0}^2}.$$