Differentialformen
Sommersemester 2018

PD Dr. Peter Massopust
27. Juni 2018

Übungsblatt 10

1. Man zeige, daß für jede singuläre k-Kette $K \in \mathcal{C}_k(U)$ gilt: $\partial\partial K = 0$.

2. Seien $U, V \subset \mathbb{R}^m$ offen und sei $F : U \to V$ eine Abbildung der Klasse C^1. Ferner sei $\omega \in \Omega_k^{(n)}(V, \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt
$$F^*(d\omega) = d(F^*\omega).$$

3. Sei $\mathbb{S}^k$ die k-dimensionale Einheitssphäre im $\mathbb{R}^{k+1}$. Man finde eine Differentialform $\omega \in \Omega_k^{(n)}(\mathbb{S}^k, \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}_0$, so daß gilt
$$\int_{\mathbb{S}^k} \omega \neq 0.$$

4. Es seien M und N Mengen im $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, und $f, g : M \to N$ Abbildungen der Klasse C^n, $n \in \mathbb{N}_0$. Die Abbildungen f und g heißen *(C^n-)homotop* zueinander, in Zeichen $f \simeq g$,wenn eine Abbildung $F : M \times [0, 1] \to N$ der Klasse C^n existiert, so daß
$$F \circ i_0 = f \quad \text{und} \quad F \circ i_1 = g$$
gilt. Hierbei ist $i_t : M \to M \times [0, 1]$ die kanonische Einbettung $x \mapsto (x, t)$.
   (a) Man zeige, daß $\simeq$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Abbildungen $f : M \to N$ der Klasse C^n ist.
   (b) Es sei $K \subseteq \mathbb{C}$ eine echte Untermenge welche $\mathbb{S}^1$ im Inneren enthält. Ferner sei $p : K \to \mathbb{C}$, $p(z) := z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + \cdots + a_1\, z + a_0$, $n \in \mathbb{N}_0$, ein Polynom das auf K nullstellenfrei ist. Man definiere $f : K \to \mathbb{S}^1$ durch
$$f(z) := \frac{p(z)}{|p(z)|},$$
und $g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $g := f|_{\mathbb{S}^1}$. Man zeige, daß g homotop zur Abbildung $p_n : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $p_n(z) := z^n$, ist