Wavelets in Funktionenräumen auf zellulären Gebieten

Wavelets in function spaces on cellular domains

Benjamin Scharf

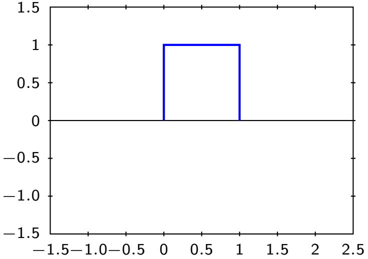
Friedrich-Schiller-Universität Jena

14. Februar, 2013

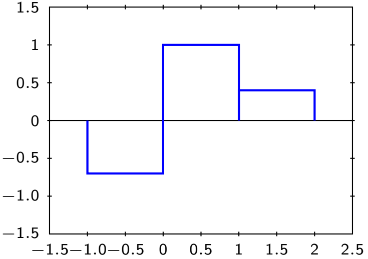
Gliederung

Das Haar-Wavelet - das erste/einfachste Wavelet (i)

Das Haar-Wavelet (Alfred Haar 1910)



Vater-Haar-Wavelet Φ_F

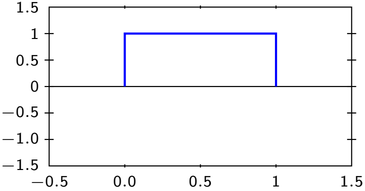


Linearkombinationen von verschobenen Φ_F

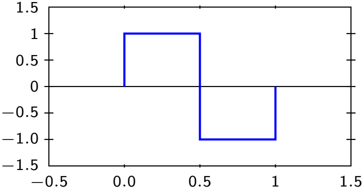
Grob gesagt: Jede Funktion, die auf den Intervallen $[r, r+1]$, $r \in \mathbb{Z}$ konstant ist, kann als Linearkombinationen des Vater-Wavelets geschrieben werden.

Das Haar-Wavelet - das erste/einfachste Wavelet (ii)

Addieren von

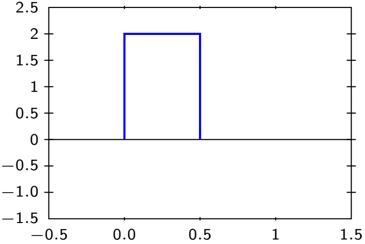


Vater-Haar-Wavelet Φ_F



Mutter-Haar-Wavelet Φ_M

ergibt



Das Haar-Wavelet - das erste/einfachste Wavelet (iii)

Definiere verschobene und gestreckte Vater- und Mutter-Wavelets durch

$$\Phi^j_{F,r}(x) := 2^{j/2}\Phi_F(2^j x - r) \text{ bzw. } \Phi^j_{M,r}(x) := 2^{j/2}\Phi_M(2^j x - r).$$

Das Haar-Wavelet - das erste/einfachste Wavelet (iii)

Definiere verschobene und gestreckte Vater- und Mutter-Wavelets durch

$$\Phi^j_{F,r}(x) := 2^{j/2}\Phi_F(2^j x - r) \text{ bzw. } \Phi^j_{M,r}(x) := 2^{j/2}\Phi_M(2^j x - r).$$

Dann gilt

$$\Phi^1_{F,0} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\Phi^0_{M,0} + \Phi^0_{F,0}\right)$$

oder allgemeiner

$$\Phi^{j+1}_{F,0} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\Phi^j_{M,0} + \Phi^j_{F,0}\right) \text{ für alle } j \in \mathbb{N}_0.$$

Das Haar-Wavelet - das erste/einfachste Wavelet (iii)

Definiere verschobene und gestreckte Vater- und Mutter-Wavelets durch

$$\Phi^j_{F,r}(x) := 2^{j/2}\Phi_F(2^j x - r) \text{ bzw. } \Phi^j_{M,r}(x) := 2^{j/2}\Phi_M(2^j x - r).$$

Dann gilt

$$\Phi^1_{F,0} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\Phi^0_{M,0} + \Phi^0_{F,0}\right)$$

oder allgemeiner

$$\Phi^{j+1}_{F,0} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\Phi^j_{M,0} + \Phi^j_{F,0}\right) \text{ für alle } j \in \mathbb{N}_0.$$

Es gibt also eine Transformation der Linearkombinationen

$$f = \sum_r \underbrace{\lambda^J_{F,r}(f)}_{\text{Koeffizienten}} \cdot \Phi^J_{F,r} \Leftrightarrow f = \sum_r \lambda^0_{F,r}(f) \cdot \Phi^0_{F,r} + \sum_{j \leq J-1} \sum_r \lambda^j_{M,r}(f) \cdot \Phi^j_{M,r}$$

Darüberhinaus ist $\left\{\Phi^0_{F,r}, \Phi^j_{M,r'}\right\}$ ein Orthonormalsystem.

Das Haar-Wavelet - das erste/einfachste Wavelet (iv)

Theorem (Die klassische Haar-Wavelet-Basis)

Die Menge $\left\{\Phi^0_{F,r}, \Phi^j_{M,r'}\right\}^{j\in\mathbb{N}_0}_{r,r'\in\mathbb{Z}}$ *ist eine Orthonormalbasis in* $L_2(\mathbb{R})$*. Das heißt: Ein* $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$ *gehört zum Funktionenraum* $L_2(\mathbb{R})$ *genau dann, wenn es eine Darstellung*

$$f = \sum_r \lambda^0_{F,r}(f) \cdot \Phi^0_{F,r} + \sum_{j\in\mathbb{N}_0} \sum_r \lambda^j_{M,r}(f) \cdot \Phi^j_{M,r}$$

mit Koeffizienten λ_F, λ_M *im Folgenraum* $\ell_2(\mathbb{Z})$ *gibt. Die Darstellung ist eindeutig, linear und es gilt*

$$\lambda^j_{M,r}(f) = (f, \Phi^j_{M,r}) \text{ bzw. } \lambda^0_{F,r}(f) = (f, \Phi^0_{F,r})$$

[Skalarprodukt in $L_2(\mathbb{R})$*].*

Das Haar-Wavelet - Diskussion

Vorteile der Haar-Wavelet-Basis:

- Orthonormalbasis, d. h. eindeutige Darstellung, einfache Berechnung der Koeffizienten
- Rechenaufwand 1: Nur 2 Startfunktionen (Φ_F und Φ_M) müssen sich gemerkt werden
- Rechenaufwand 2: Lokales Verhalten der Haar-Wavelets (kompakter Träger):

$$\lambda^j_{M,r}(f) = (f, \Phi^j_{M,r}) = \int_{2^{-j}\cdot r}^{2^{-j}\cdot(r+1)} f(x)\cdot \Phi^j_{M,r}(x)\,dx.$$

Verhalten von f nur in kleiner Region (Rad. $\sim 2^{-j}$) um $2^{-j}r$ nötig

Das Haar-Wavelet - Diskussion

Vorteile der Haar-Wavelet-Basis:

- Orthonormalbasis, d. h. eindeutige Darstellung, einfache Berechnung der Koeffizienten
- Rechenaufwand 1: Nur 2 Startfunktionen (Φ_F und Φ_M) müssen sich gemerkt werden
- Rechenaufwand 2: Lokales Verhalten der Haar-Wavelets (kompakter Träger):
$$\lambda^j_{M,r}(f) = (f, \Phi^j_{M,r}) = \int_{2^{-j}\cdot r}^{2^{-j}\cdot(r+1)} f(x)\cdot\Phi^j_{M,r}(x)\,dx.$$
Verhalten von f nur in kleiner Region (Rad. $\sim 2^{-j}$) um $2^{-j}r$ nötig

Nachteile der Haar-Wavelet-Basis:

- Φ_F und Φ_M sind nicht glatt, haben Sprungstellen $\Rightarrow$ Die Haar-Wavelet-Basis kann Kanten gut beschreiben, aber nicht glattes Verhalten.
!!! Unterschied zur Fouriertransformation/Fourier-ONB auf Torus !!!

Glatte, kompakte Wavelet-Basen in Dimension 1 (i)

Das Ziel

Umso glatter/diff'barer f, umso schneller der Abfall der Koeffizienten $\lambda^j_{M,r}(f)$ in $j \Rightarrow$ bessere Approximation/Komprimierung von glatten Funkt.
Grob gesagt: $f \in C^k(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \lambda^j_{M,r}(f) \lesssim j^{-k}$

Das ist nicht möglich mit der Haar-Wavelet-Basis!

Glatte, kompakte Wavelet-Basen in Dimension 1 (i)

Das Ziel

Umso glatter/diff'barer f, umso schneller der Abfall der Koeffizienten $\lambda^j_{M,r}(f)$ in j $\Rightarrow$ bessere Approximation/Komprimierung von glatten Funkt.
Grob gesagt: $f \in C^k(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \lambda^j_{M,r}(f) \lesssim j^{-k}$

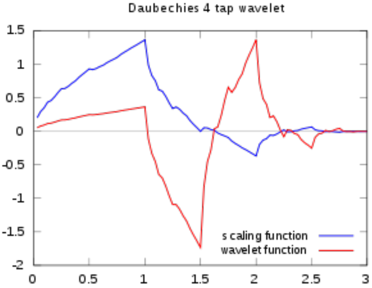
Das ist nicht möglich mit der Haar-Wavelet-Basis!

Anforderung an kompakte Wavelet-Basen in $C^u(\mathbb{R})$

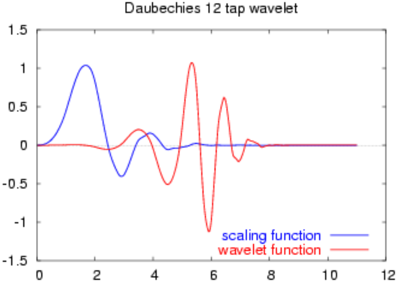
1. Es gilt $\Phi_M, \Phi_F \in C^u(\mathbb{R})$, $\Phi_M(x) = \Phi_F(x) = 0$ für $x \notin [0, c]$.
2. Mit $\Phi^j_{M,r}(x) := 2^{j/2}\Phi_M(2^j x - r)$ bzw. $\Phi_{F,r}(x) := \Phi_F(x - r)$ ist die Menge $\left\{\Phi^0_{F,r}, \Phi^j_{M,r'}\right\}^{j\in\mathbb{N}_0}_{r,r'\in\mathbb{Z}}$ eine Orthonormalbasis in $L_2(\mathbb{R})$.

Ingrid Daubechies 1988/Buch 1992: Für jedes $u \in \mathbb{N}_0$ gibt es solche Funkt. Φ_M, Φ_F.

Glatte, kompakte Wavelet-Basen in Dimension 1 (ii)

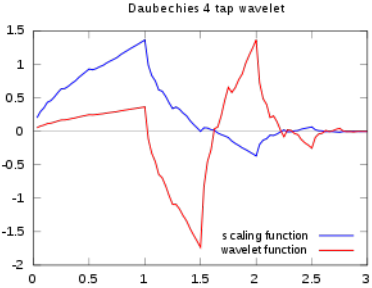


2-mal differenzierbare Daubechies-Wavelets

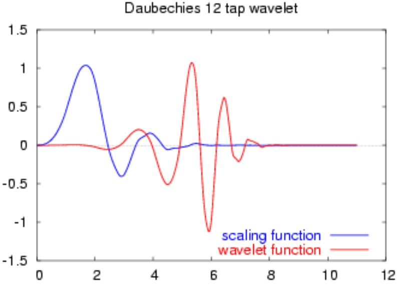


6-mal differenzierbare Daubechies-Wavelets

Glatte, kompakte Wavelet-Basen in Dimension 1 (ii)



2-mal differenzierbare Daubechies-Wavelets



6-mal differenzierbare Daubechies-Wavelets

Der Träger wächst mit der Glattheit, aber bleibt kompakt.

Ein $C^\infty(\mathbb{R})$-Wavelet mit kompaktem Träger gibt es nicht.

Weiterhin: Daubechies-Mutter-Wavelets aus $C^u(\mathbb{R})$ haben u Momentenbedingungen, d. h. Polynome der Ordnung $u-1$ können als Linearkombinationen der $\Phi^0_{F,r}$ ausgedrückt werden und stehen senkrecht auf $\Phi^j_{M,r}$.

Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Daubechies-Wavelets

Wavelets auf $\mathbb{R}^n$ - Tensorproduktstruktur

Eine mögliche Idee der Verallgemeinerung der (Daubechies)-Wavelets von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^n$ is das Tensorprodukt: Dazu bilden wir

$$\Phi^j_{G,r}(x) := 2^{jn/2} \prod_{k=1}^{n} \Phi^j_{G_k,r_k}(x_k) \text{ für } r \in \mathbb{Z}^n, j \in \mathbb{N}_0$$

mit $r = (r_1, \ldots, r_n)$ und $G = (G_1, \ldots, G_n) \in \{F, M\}^n$.
($G = (F, \ldots, F)$ ist nicht zulässig für $j \geq 1$).

Wavelets auf $\mathbb{R}^n$ - Tensorproduktstruktur

Eine mögliche Idee der Verallgemeinerung der (Daubechies)-Wavelets von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^n$ is das Tensorprodukt: Dazu bilden wir

$$\Phi^j_{G,r}(x) := 2^{jn/2} \prod_{k=1}^{n} \Phi^j_{G_k,r_k}(x_k) \text{ für } r \in \mathbb{Z}^n, j \in \mathbb{N}_0$$

mit $r = (r_1, \ldots, r_n)$ und $G = (G_1, \ldots, G_n) \in \{F, M\}^n$.
($G = (F, \ldots, F)$ ist nicht zulässig für $j \geq 1$).

Theorem (Daubechies-Wavelet-Basis in $\mathbb{R}^n$)

Seien Φ_M, Φ_F Daubechies-Wavelet-Funktionen aus $C^u(\mathbb{R})$. Dann ist das System $\{\Phi^j_{G,r}\}^{j\in\mathbb{N}_0}_{r\in\mathbb{Z}^n} \subset C^u(\mathbb{R}^n)$ mit G wie oben eine Orthonormalbasis in $L_2(\mathbb{R}^n)$.

Sobolev-Räume $W_2^k(\mathbb{R}^n)$

Wir erinnern uns an das Ziel:

Umso glatter f ist, umso schneller soll der Abfall von $\lambda^j_{M,r}(f)$ in j sein.

Eine Möglichkeit zur Beschreibung von Integrierbarkeit und Glattheit sind die (klassischen) Sobolev-Räume auf $\mathbb{R}^n$:

Sobolev-Räume $W_2^k(\mathbb{R}^n)$

Wir erinnern uns an das Ziel:

Umso glatter f ist, umso schneller soll der Abfall von $\lambda^j_{M,r}(f)$ in j sein.

Eine Möglichkeit zur Beschreibung von Integrierbarkeit und Glattheit sind die (klassischen) Sobolev-Räume auf $\mathbb{R}^n$:

Definition

Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann definieren wir

$$W_2^k(\mathbb{R}^n) := \{f \in L_2(\mathbb{R}^n) : D^\alpha f \in L_2(\mathbb{R}^n) \text{ für } |\alpha| \leq k\}.$$

Das Hauptresultat (hier für $W_2^k(\mathbb{R}^n)$, im Allgemeinen für Besov- und Triebel-Lizorkin-Räume) ist die Wavelet-Darstellung mittels Daubechies-Wavelets:

Wavelets für Sobolev-Räume $W_2^k(\mathbb{R}^n)$

Theorem (Triebel 2006/2008)

Sei $k, u \in \mathbb{N}$*,* $u \geq k+1$ *und* $\Phi^j_{G,r} \in C^u(\mathbb{R}^n)$ *die n-dimensionalen Daubechies-Waveletfunktionen von* $L_2(\mathbb{R}^n)$*. Dann gehört* $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ *zum Sobolev-Raum* $W_2^k(\mathbb{R}^n)$ *genau dann, wenn*

$$f = \sum_{j,r,G} \lambda^j_{G,r}(f) \cdot \Phi^j_{G,r}$$

und

$$\lambda \in w_2^k(\mathbb{Z}^n), \text{ d. h. } \sum_{j,r,G} \left(2^{jk} \cdot |\lambda^j_{G,r}(f)|\right)^2 < \infty.$$

Wavelets für Sobolev-Räume $W_2^k(\mathbb{R}^n)$

Theorem (Triebel 2006/2008)

Sei $k, u \in \mathbb{N}$, $u \geq k+1$ und $\Phi^j_{G,r} \in C^u(\mathbb{R}^n)$ die n-dimensionalen Daubechies-Waveletfunktionen von $L_2(\mathbb{R}^n)$. Dann gehört $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ zum Sobolev-Raum $W_2^k(\mathbb{R}^n)$ genau dann, wenn

$$f = \sum_{j,r,G} \lambda^j_{G,r}(f) \cdot \Phi^j_{G,r}$$

und

$$\lambda \in w_2^k(\mathbb{Z}^n), \text{ d. h. } \sum_{j,r,G} \left(2^{jk} \cdot |\lambda^j_{G,r}(f)|\right)^2 < \infty.$$

Die Darstellung ist eindeutig, linear und es gilt

$$\lambda^j_{G,r}(f) = (f, \Phi^j_{G,r}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot \Phi^j_{G,r}(x)\, dx.$$

Table of contents

Funktionenräume auf Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Im allgemeinen Fall führt man Funktionenräume auf Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ durch Einschränkung (Quotientenraum) ein, d. h. für Sobolev-Räume auf dem Einheitswürfel:

Definition (Funktionenräume auf Ω)

Sei Q der Einheitswürfel in $\mathbb{R}^n$. Dann

$$W_2^k(Q) := \{f \in L_2(Q) : f = g|Q \text{ für ein } g \in W_2^k(Q)\},$$

$$\|f|W_2^k(Q)\| = \inf \|g|W_2^k(Q)\|,$$

wobei das Infimum über allen $g \in W_2^k(\mathbb{R}^n)$ mit $g|Q = f$ gebildet wird.

Funktionenräume auf Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Im allgemeinen Fall führt man Funktionenräume auf Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ durch Einschränkung (Quotientenraum) ein, d. h. für Sobolev-Räume auf dem Einheitswürfel:

Definition (Funktionenräume auf Ω)

Sei Q der Einheitswürfel in $\mathbb{R}^n$. Dann

$$W_2^k(Q) := \{f \in L_2(Q) : f = g|Q \text{ für ein } g \in W_2^k(Q)\},$$
$$\|f|W_2^k(Q)\| = \inf \|g|W_2^k(Q)\|,$$

wobei das Infimum über allen $g \in W_2^k(\mathbb{R}^n)$ mit $g|Q = f$ gebildet wird.

In speziellen Fällen gibt es äquivalente (intrinsische) Charakterisierungen, hier z. B.

$$f \in W_2^k(Q) \Leftrightarrow \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f|L_2(Q)\| < \infty \text{ (äquivalente Normen)}$$

Wavelets auf Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

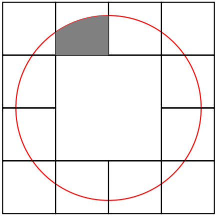
Wie überträgt man Wavelet-Basen von Räumen von Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ auf Räume von Funktionen auf Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^n$?

Wavelets auf Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Wie überträgt man Wavelet-Basen von Räumen von Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ auf Räume von Funktionen auf Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^n$?

Erste Idee: Wähle Wavelets mit kompaktem Träger (Haar, Daubechies)!

Zweite Idee: Wähle eine Funktion auf Ω, erweitere sie auf $\mathbb{R}^n$, finde eine Wavelet-Zerlegung und schränke diese auf Ω ein



Probleme: unpraktisch (nicht intrinsisch), Basis-Eigenschaft, Orthogonalität, Momentenbedingungen, (Glattheit)

Lösung: Konstruiere Wavelet-Basen (orthogonal oder biorthogonal) direkt auf Ω - Orthogonalbasen in $L_2(\Omega)$: Ciesielski, Figiel '83,'84, Triebel '06,'08

Wavelets für Funktionenräume auf Gebieten Ω

Sei $u \in \mathbb{N}_0$. Dann heißt

$$\Phi = \left\{ \Phi_\ell^j : j \in \mathbb{N}_0, \ell = 1, \dots, N_j \right\} \subset C^u(\Omega)$$

u-Wavelet-System in $\bar{\Omega}$ (angepasst an $\mathbb{Z}^\Omega$), falls gelten

- Trägerbedingungen: Φ_ℓ^j hat Träger in $\Omega \cap$ Würfel mit Radius $\sim 2^{-j}$
- Ableitungsbedingungen: $\Phi_\ell^j \in C^u(\Omega)$ und die Ableitungen sind passend beschränkt (in $\mathbb{R}^n$ folgt dies automatisch)

Wavelets für Funktionenräume auf Gebieten Ω

Sei $u \in \mathbb{N}_0$. Dann heißt

$$\Phi = \left\{ \Phi^j_\ell : j \in \mathbb{N}_0, \ell = 1, \ldots, N_j \right\} \subset C^u(\Omega)$$

u-Wavelet-System in $\bar{\Omega}$ (angepasst an $\mathbb{Z}^\Omega$), falls gelten

- Trägerbedingungen: Φ^j_ℓ hat Träger in $\Omega \cap$ Würfel mit Radius $\sim 2^{-j}$
- Ableitungsbedingungen: $\Phi^j_\ell \in C^u(\Omega)$ und die Ableitungen sind passend beschränkt (in $\mathbb{R}^n$ folgt dies automatisch)

Zusätzlich heißt ein u-Wavelet-System oszillierend, falls gilt

- (Ersatz)- Momentenbedingungen: Es gilt

$$\left| \int_\Omega \psi(x) \Phi^j_\ell(x)\, dx \right| \lesssim 2^{-j\frac{n}{2} - ju} \left\| \psi | C^u(\Omega) \right\| \text{ für alle } \psi \in C^u(\Omega),$$

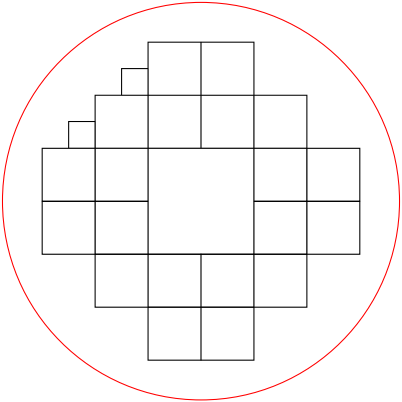
  falls Φ^j_ℓ im Innern o. auf Rand Ω's liegt (Abstand $\notin \left(c_1 2^{-j}, c_2 2^{-j} \right)$).

Ein oszillierendes u-Wavelet-System heißt innern, falls gilt

- Interne Trägerbedingungen: Der Träger von Φ^j_ℓ hat Abstand $\sim 2^{-j}$ zum Rand $\Rightarrow$ alle Wavelets liegen im Innern von Ω weg vom Rand $\partial\Omega$

Innere Wavelets - am Beispiel der Kugel

Der Träger der innernen Wavelets (der ersten Ordnung) - hier am Beispiel der Kugel:



Innere Waveletbasis für $L_2(\Omega)$ - Der Startpunkt

Theorem (Triebel 2008)

Sei Ω ein beliebiges Gebiet im $\mathbb{R}^n$. Für jedes $u \in \mathbb{N}_0$ existiert ein

$$\Phi = \left\{ \Phi_\ell^j : j \in \mathbb{N}_0, \ell = 1, \ldots, N_j \right\} \subset C^u(\Omega),$$

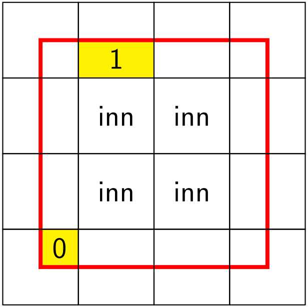
das gleichzeitig

1. *eine Orthonormalbasis in $L_2(\Omega)$ und*
2. *ein inneres u-Wavelet-System ist.*

Für $u = 0$ kann man das Haar-Wavelet geeignet eingeschränkt auf Ω wählen.

Wavelet-Basen für $W_2^k(Q)$ - Rand-Wavelets

Ein u-Wavelet-System, das eine Basis für $W_2^k(Q)$ sein soll, kann für $k \geq 1$ nicht innern sein: Denn Funktionen aus $W_2^k(Q)$ haben Randwerte auf den Randflächen des Würfels Q (Spuren), innere Wavelets aber nicht. Deshalb benötigen wir Randwavelets, die aus den Randwerten auf den Rändern der Dimensionen $k = 0, \ldots, n-1$ von Q entstehen.



Wavelets für $W_2^k(Q)$

Theorem (Triebel 2008 - Theorem 6.30 für die Räume $F^s_{p,q}(Q)$)

Sei

$$u, k \in \mathbb{N}_0, u > k \text{ und } k - \frac{m}{2} \notin \mathbb{N}_0$$

für $m = 1, \ldots, n$.

Dann gibt es ein oszillierendes u-Wavelet-System Φ*, das gleichzeitig eine Riesz-Basis im Sobolev-Raum* $W_2^k(Q)$ *ist,*

Wavelets für $W_2^k(Q)$

Theorem (Triebel 2008 - Theorem 6.30 für die Räume $F^s_{p,q}(Q)$)

Sei

$$u, k \in \mathbb{N}_0, u > k \text{ und } k - \frac{m}{2} \notin \mathbb{N}_0$$

für $m = 1, \ldots, n$.
Dann gibt es ein oszillierendes u-Wavelet-System Φ, das gleichzeitig eine Riesz-Basis im Sobolev-Raum $W_2^k(Q)$ ist, d. h.: Ein $f \in L_2(Q)$ gehört zu $W_2^k(Q)$ genau dann, wenn es dargestellt werden kann als

$$f = \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \sum_{r=1}^{N_j} \lambda_r^j(f) \cdot 2^{-\frac{jn}{2}} \Phi_r^j, \tag{1}$$

wobei λ aus dem Folgenraum $w_2^k(Q)$ ist. Die Darstellung (1) ist eindeutig, linear und

$$\text{im Kern } \lambda_r^j(f) \sim 2^{jn/2}(f, \Phi_r^j).$$

Spuren auf den Rändern des Würfels

Das Ausschließen der Werte $k - \frac{m}{2} \notin \mathbb{N}_0$ für $m = 1, \ldots, n$ entsteht durch die verwendete Methode. Der Hauptteil des Beweises ist folgender Satz:

Proposition

Sei

$$k \in \mathbb{N} \textit{ und } k - \frac{m}{2} \notin \mathbb{N}_0 \textit{ für } m = 1, \ldots, n.$$

Dann gilt

$$\tilde{W}_2^k(Q) = \left\{ f \in W_2^k(Q) : \mathrm{tr}_\Gamma^{\bar{r}} = 0 \right\},$$

(alle existierenden Spuren müssen verschwinden!)

Hierbei ist

$$\tilde{W}_2^k(Q) := \{ f \in W_2^k(\mathbb{R}^n) : \mathit{supp}\, f \subset \overline{Q} \}.$$

Für die Räume auf der linken Seite existiert ein inneres u-Wavelet-System, das eine Riesz-Basis ist.

Table of contents

Die Situation des Würfels Q in den Ausnahmefällen

Grob gesagt:

- Ein C^∞-Gebiet hat nur einen Rand der Dimension $n-1 \rightarrow$ Ausnahmewerte für $k - \frac{1}{2} \in \mathbb{N}_0$
- Der Würfel Q hat Ränder der Dimensionen 0 bis $n-1 \rightarrow$ Ausnahmewerte für $k - \frac{m}{2} \in \mathbb{N}_0$ for $m = 1, \ldots, n$

Die Situation des Würfels Q in den Ausnahmefällen

Grob gesagt:

- Ein C^∞-Gebiet hat nur einen Rand der Dimension $n-1 \to$ Ausnahmewerte für $k - \frac{1}{2} \in \mathbb{N}_0$
- Der Würfel Q hat Ränder der Dimensionen 0 bis $n-1 \to$ Ausnahmewerte für $k - \frac{m}{2} \in \mathbb{N}_0$ for $m = 1, \ldots, n$

Beispiel (Grisvard '85, '92)

Der Funktionenraum $W_2^1(Q) = F_{2,2}^1(Q)$ gehört zu den Ausnahmefällen: $k - \frac{2}{2} = 2 - 1$. Sei $\Gamma = \partial\Omega = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4$. Dann ist der Raum der Spuren $\mathrm{tr}_\Gamma\, W_2^1(Q)$ die Menge aller Tupel $g = (g_1, g_2, g_3, g_4)$ mit

$$g_\ell \in H^{\frac{1}{2}}(I_\ell), \quad \ell = 1,2,3,4$$

und

$$\int_0^{1/2} \frac{|g_1(t) - g_2(t)|^2}{t}\, dt < \infty, \text{ etc.}$$

Modifizierte (reinforced) Funktionenräume auf dem Würfel

Hans Triebel: "Wenn der Berg nicht zum Propheten kommt, muss der Prophet zum Berg gehen."

Modifizierte (reinforced) Funktionenräume auf dem Würfel

Hans Triebel: "Wenn der Berg nicht zum Propheten kommt, muss der Prophet zum Berg gehen."

Sei

$$d(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \text{ and } \Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega : d(x) < \varepsilon\}.$$

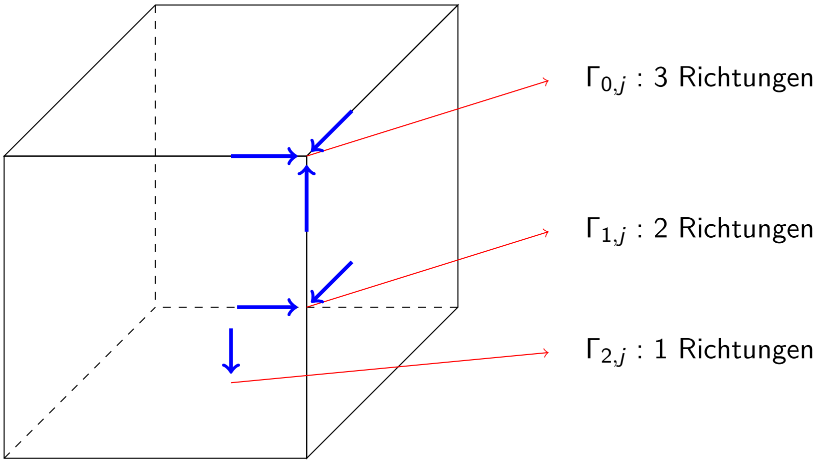
Seien $\Gamma_{\ell,j}$ die ℓ-dimensionalen Ränder des Würfels Q. Mit $\mathbb{N}^n_{\ell,j}$ bezeichnen wir alle Multiindizes, deren Richtungen senkrecht auf $\Gamma_{\ell,j}$ stehen.

Definition

Wir sagen, dass $f \in W_2^k(\mathbb{R}^n)$ die "reinforced property" $R_\ell^{r,2}$ erfüllt, genau dann, wenn

$$d^{-\frac{n-\ell}{2}} \cdot D^\alpha f \in L_2((\mathbb{R}^n \setminus \Gamma_{\ell,j})_\varepsilon) \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{N}^n_{\ell,j}, |\alpha| = r \text{ und } j = 1, \dots, n_\ell.$$

Modifizierte (reinforced) Funktionenräume auf dem Würfel



Modifizierte (reinforced) Funktionenräume auf dem Würfel

Definition

Sei $k \in \mathbb{N}$ und

$$W_2^{k,\mathrm{rinf}}(Q) := W_2^{k,\mathrm{rinf}}(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma)_{|Q}$$

ausgestattet mit der üblichen inf-Norm und

$W_2^{k,\mathrm{rinf}}(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma) :=$

$$\{f \in W_2^k(\mathbb{R}^n) : \forall\, 0 \leq \ell \leq n-1 : f \text{ erfüllt } R_\ell^{r,2}, \text{ falls } r = k - \frac{n-\ell}{2} \in \mathbb{N}_0\}$$

Prüfe für jede Dimension ℓ, ob es sich um Ausnahmewerte handelt, und wenn ja, füge die “reinforce property” hinzu!

Wavelet-Basen für modifizierte Funktionenräume auf Q

Theorem (S. (2012) - für $F^s_{p,q}(Q)$-Räume)

Sei $k \in \mathbb{N}$, $u > k$. Dann gibt es ein oszillierendes u-Wavelet-System, das eine Riesz-Basis in $W_2^{k,\mathrm{rinf}}(Q)$ ist - d. h.

$$f \in W_2^{k,\mathrm{rinf}}(Q) \quad \Leftrightarrow \quad f = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{r=1}^{N_j} \lambda_r^j(f) \cdot 2^{-\frac{jn}{2}} \Phi_r^j$$

mit $\lambda \in w_2^k(Q)$ (linear, eindeutige Darstellung wie zuvor).

Wavelet-Basen für modifizierte Funktionenräume auf Q

Theorem (S. (2012) - für $F^s_{p,q}(Q)$-Räume)

Sei $k \in \mathbb{N}$, $u > k$. Dann gibt es ein oszillierendes u-Wavelet-System, das eine Riesz-Basis in $W_2^{k,\mathrm{rinf}}(Q)$ ist - d. h.

$$f \in W_2^{k,\mathrm{rinf}}(Q) \quad \Leftrightarrow \quad f = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{r=1}^{N_j} \lambda_r^j(f) \cdot 2^{-\frac{jn}{2}} \Phi_r^j$$

mit $\lambda \in w_2^k(Q)$ (linear, eindeutige Darstellung wie zuvor).

- Im speziellen Fall $k = 0$ ($L_2(\Omega)$) können wir ein inneres u-Wavelet-System wählen, z. B. das Haar-Wavelet-System - sonst nicht.
- Dieses Theorem ist eine Verallgemeinerung des Wavelet-Theorems für $k - \frac{m}{2} \notin \mathbb{N}_0$ (Triebel 2008) - dann gibt es keine Extrabedingungen.

Ein Beispiel - $W_2^{1,\mathrm{rinf}}(Q) = F_{2,2}^{1,\mathrm{rinf}}(Q)$ für $n = 2$ (i)

Es gilt $k - \frac{2}{2} = r = 0$ - Ränder der Dimension 0 (Eckpunkte) sind problematisch. Daher

$$W_2^{1,\mathrm{rinf}}(Q) = F_{2,2}^{1,\mathrm{rinf}}(Q) = \left\{ f \in W_2^1(Q) : \int_Q |f(x)|^2 \frac{dx}{d(x)^2} < \infty \right\},$$

wobei d der Abstand von den Eckpunkten (Γ_0) von Q ist.

Ein Beispiel - $W_2^{1,\mathrm{rinf}}(Q) = F_{2,2}^{1,\mathrm{rinf}}(Q)$ für $n = 2$ (i)

Es gilt $k - \frac{2}{2} = r = 0$ - Ränder der Dimension 0 (Eckpunkte) sind problematisch. Daher

$$W_2^{1,\mathrm{rinf}}(Q) = F_{2,2}^{1,\mathrm{rinf}}(Q) = \left\{ f \in W_2^1(Q) : \int_Q |f(x)|^2 \frac{dx}{d(x)^2} < \infty \right\},$$

wobei d der Abstand von den Eckpunkten (Γ_0) von Q ist.

Dann gibt es nach dem Theorem ein (nicht-inneres) oszillierendes u-Wavelet-System, das eine Riesz-Basis ist. Dies ist nicht möglich (mit dieser Methode) für $W_2^1(Q)$ - Wavelet-Basen (nach unserer Definition) für $W_2^1(Q)$ wurden bis jetzt nicht gefunden.

Zusammenfassung

Was wir geschafft haben:

- Wavelet-Basen für geeignete modifizierte (reinforced) Funktionenräume auf dem Würfel Q (genauer auf Polyedern) konstruiert
- Das Theorem von Triebel aus [Tri08] für Triebel-Lizorkin-Räume $F^s_{p,q}(Q)$ (die die Sobolev-Räume $W^k_p(Q)$, $H^s_p(Q)$ einschließen) verallgemeinert und die Ausnahmewerte eliminiert

Zusammenfassung

Was wir geschafft haben:

- Wavelet-Basen für geeignete modifizierte (reinforced) Funktionenräume auf dem Würfel Q (genauer auf Polyedern) konstruiert
- Das Theorem von Triebel aus [Tri08] für Triebel-Lizorkin-Räume $F^s_{p,q}(Q)$ (die die Sobolev-Räume $W^k_p(Q)$, $H^s_p(Q)$ einschließen) verallgemeinert und die Ausnahmewerte eliminiert

Was wir nicht geschafft haben:

- Zu zeigen, dass die Modifizierung im Allgemeinen immer nötig ist
- Erweiterung der Konstrunktion auf sinnvolle modifizierte Funktionenräume auf zelluläre Gebieten (C^∞-Gebieten, Kugel)
- Erweiterung der Konstruktion auf Besov-Räume $B^s_{p,q}(Q)$ - das sollte möglich sein, aber von sehr hässlicher Gestalt

Zusammenfassung

Was wir geschafft haben:

- Wavelet-Basen für geeignete modifizierte (reinforced) Funktionenräume auf dem Würfel Q (genauer auf Polyedern) konstruiert
- Das Theorem von Triebel aus [Tri08] für Triebel-Lizorkin-Räume $F^s_{p,q}(Q)$ (die die Sobolev-Räume $W^k_p(Q)$, $H^s_p(Q)$ einschließen) verallgemeinert und die Ausnahmewerte eliminiert

Was wir nicht geschafft haben:

- Zu zeigen, dass die Modifizierung im Allgemeinen immer nötig ist
- Erweiterung der Konstrunktion auf sinnvolle modifizierte Funktionenräume auf zelluläre Gebieten (C^∞-Gebieten, Kugel)
- Erweiterung der Konstruktion auf Besov-Räume $B^s_{p,q}(Q)$ - das sollte möglich sein, aber von sehr hässlicher Gestalt

Danke für die Aufmerksamkeit!