PD Dr. Peter Massopust
M.Sc. Andreas Bluhm

Übungsblatt 7 - Lösungsvorschläge

1. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte, n-dimensionale C^1-Mannigfaltigkeit mit glattem Rand ∂M. $v \in \Gamma(U)$ stetig differenzierbar und divergenzfrei mit verschwindender Normalkomponente auf ∂M.

   Man zeige, dass gilt:
$$\int_M v(x) \cdot \nabla f \, dx = 0, \qquad \forall\, f \in C^1(U).$$

   Lösung: Man wende den Gaußschen Satz auf $f\,v$ an:
$$\begin{aligned}
0 = \int_{\partial M} f \underbrace{v \cdot \nu}_{=0} \, dS &= \int_{\partial M} (f\,v) \cdot \nu \, dS = \int_M \operatorname{div}(f\,v)\, dx \\
&= \int_M \left(\sum_{i=1}^n \partial_i (f v_i) \right) dx = \int_M \left(\sum_{i=1}^n [\partial f_i v_i + f \partial v_i] \right) dx \\
&= \int_M (\nabla f \cdot v \, dx + f \underbrace{\operatorname{div} v}_{=0}) \, dx = \int_M \nabla f \cdot v \, dx.
\end{aligned}$$

2. Sei
$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z,\ z \in (1,4)\}$$
   ein Teil eines Paraboloids und $v \in \Gamma(\mathbb{R}^3)$, $(x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} yz \\ -xz \\ 1 \end{pmatrix}$, stetig differenzierbar.

   Berechnen Sie
$$\int_M \operatorname{rot}\, v \cdot \nu \; dS$$
   mit Hilfe des Satzes von Stokes, wobei ν das stetige äussere Normalenfeld an M ist.

   Lösung: Setze $U := B_2(0) \setminus \overline{B_1(0)}$. Dann ist $M = \Psi(U)$, wobei die Karte $\Psi : U \to \mathbb{R}^3$ durch
$$\Psi(x,y) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix},$$
   gegeben ist. Es ist $\partial M := \Psi(\partial U) = \gamma_1([0, 2\pi)) \cup \gamma_2([0, 2\pi))$, wobei
$$\gamma_1(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \gamma_2(t) := \begin{pmatrix} 2\cos(-t) \\ 2\sin(-t) \\ 4 \end{pmatrix}$$
   und ∂M wie durch γ_1 und γ_2 vorgegeben orientiert sei.

   Wie leicht nachgeprüft werden kann, sind die Voraussetzungen des Satzes von Stokes erfüllt und es folgt
$$\begin{aligned}
\int_M \operatorname{rot} v \cdot \nu dS = \int_{\partial M} v \cdot dx &= \int_{\gamma_1((0,2\pi))} v \cdot dx + \int_{\gamma_2((0,2\pi))} v \cdot dx \\
&= \int_0^{2\pi} v(\gamma_1(t)) \cdot \dot{\gamma}_1(t) dt + \int_0^{2\pi} v(\gamma_2(t)) \cdot \dot{\gamma}_2(t) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -8\sin t \\ -8\cos t \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\sin t \\ -2\cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-1)\, dt + \int_0^{2\pi} 16\, dt = 30\pi.
\end{aligned}$$

3. Die Maxwell-Gleichungen für elektromagnetische Felder im Vakuum lauten in geeigneten Einheiten

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \operatorname{rot} \mathbf{B}, \qquad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \mathbf{E},$$

wobei $\mathbf{E} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und $\mathbf{B} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die elektrische bzw. magnetische Feldstärke beschreiben.

Es sei (M, ν) eine orientierte Fläche im $\mathbb{R}^3$ und $\Psi : \widetilde{U} \to \mathbb{R}^3$ eine Karte von M, wobei $\widetilde{U}$ eine offene Menge und U ein beschränktes C^1-Gebiet mit $\widetilde{U} \supset \overline{U}$ ist. Zeigen Sie für $A := \Psi(U)$ und $\partial A := \Psi(\partial U)$

$$\int_{\partial A} \mathbf{E} \cdot dx = -\int_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \nu \, dS, \quad \int_{\partial A} \mathbf{B} \cdot dx = \int_A \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \nu \, dS,$$

wobei die Orientierung von ∂A kompatibel zu ν gewählt ist.

<u>Lösung:</u> Bildung des Skalarprodukts mit ν, Integration über A und Anwendung des Satzes von Stokes liefert

$$\int_A \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \nu \, dS = \int_A \operatorname{rot} \mathbf{B} \cdot \nu \, dS = \int_{\partial A} \mathbf{B} \cdot ds$$

und

$$\int_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \nu \, dS = \int_A -\operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot \nu \, dS = -\int_{\partial A} \mathbf{E} \cdot dx.$$

4. Sei $U \overset{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{R}^n$ und seien $\omega \in \Omega_k(U)$, $\varphi \in \Omega_\ell(U)$ und $\theta \in \Omega_m(U)$. Man zeige:

   (a) $(\omega \wedge \varphi) \wedge \theta = \omega \wedge (\varphi \wedge \theta)$.

   (b) $\omega \wedge \varphi = (-1)^{k\ell} \varphi \wedge \omega$.

   (c) $\omega \wedge (\varphi + \theta) = \omega \wedge \varphi + \omega \wedge \theta$, falls $\ell = m$ ist.

<u>Lösung:</u> (a) und (c) folgen direkt aus den Definitionen.

Um (b) zu zeigen, sei $\omega = \sum\limits_I a_I dx_I$ und $\varphi = \sum\limits_J b_J dx_J$, wobei

$$I : 1 \le i_1 < \cdots i_k \le n, \qquad J : 1 \le j_1 < \cdots j_\ell \le n.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \omega \wedge \varphi &= \sum_{I,J} a_I b_J \, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_\ell} \\ &= \sum_{I,J} b_J a_I \, (-1) \, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge d_{x_{k-1}} \wedge dx_{j_1} \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_2} \wedge \cdots \wedge dx_{j_\ell} \\ &= \sum_{I,J} b_J a_I \, (-1)^k \, dx_{j_1} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_2} \wedge \cdots \wedge dx_{j_\ell} \end{aligned}$$

Wiederholt man diese Vertauschungen für alle dx_{j_ℓ}, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \omega \wedge \varphi &= \sum_{I,J} b_J a_I \, (-1)^{k\ell} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_\ell} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \\ &= (-1)^{k\ell} \varphi \wedge \omega. \end{aligned}$$

5. Es seien $U \overset{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{R}^n$, $V \overset{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{R}^m$ und $f \in C^1(U, V)$. Es seien $\omega, \varphi \in \Omega_k(V)$. Man zeige, dass gilt:

   (a) $f^*(\omega + \varphi) = f^*\omega + f^*\varphi$.

   (b) $f^*(g\omega) = f^*(g) f^*(\omega)$, wobei $g : V \to \mathbb{R}$ eine Funktion ist.

(c) Für $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in \Omega_1(f(U))$ ist $f^*(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k) = f^*(\varphi_1) \wedge \ldots \wedge f^*(\varphi_k)$.

(d) $f^*(\omega \wedge \varphi) = (f^*\omega) \wedge f^*(\varphi)$. N.B. Diese Identität gilt für beliebige Differentialformen.

(e) $(f \circ g)^*\omega = g^*(f^*\omega)$, wobei $g \in C^1(W, U)$ mit $W \overset{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{R}^p$ ist.

Lösung: Sei $p \in U$ und seien $v_1, \ldots, v_k \in T_pU$.

(a)

$$\begin{aligned} f^*(\omega + \varphi)(p)(v_1, \ldots, v_k) &= (\omega + \varphi)(f(p))(Df(p)(v_1), \ldots, Df(p)(v_k)) \\ &= f^*(\omega)(p)(v_1, \ldots, v_k) + f^*(\varphi)(p)(v_1, \ldots, v_k) \\ &= (f^*\omega + f^*\varphi)(p)(v_1, \ldots, v_k). \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} f^*(g\omega)(p)(v_1, \ldots, v_k) &= (g\omega)(f(p))(Df(p)(v_1), \ldots, Df(p)(v_k)) \\ &= (g \circ f)(p) f^*(\omega)(p)(v_1, \ldots, v_k) = f^*(g)(p) f^*(\omega)(p)(v_1, \ldots, v_k). \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} f^*(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k)(p)(v_1, \ldots, v_k) &= (\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k) f(p)(Df(p)(v_1), \ldots, Df(p)(v_k)) \\ &= \det(\varphi_i(Df(p)(v_j))) = \det(f^*\varphi_i(p)(v_j)) \\ &= (f^*\varphi_1 \wedge \ldots \wedge f^*\varphi_k)(p)(v_1, \ldots, v_k). \end{aligned}$$

(d) Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$ sei $y_j := f_j(x)$, $j = 1, \ldots, m$. Sei $\omega = \sum_I a_I dy_I$ und $\varphi = \sum_J b_J dy_J$. (Notation wie in Aufgabe 4.)

$$\begin{aligned} f^*(\omega \wedge \varphi) &= f^*\left(\sum_{I,J} a_I b_J dy_I \wedge dy_J\right) \\ &= \sum_{I,J} a_I(f_1, \ldots, f_m) b_J(f_1, \ldots, f_m) df_I \wedge df_J \\ &= \sum_I a_I(f_1, \ldots, f_m) df_I \wedge \sum_J b_J(f_1, \ldots, f_m) df_J \\ &= f^*\omega \wedge f^*\varphi. \end{aligned}$$

(e) Mit der Notation von (d) gilt:

$$\begin{aligned} (f \circ g)^*\omega &= \sum_I a_I((f \circ g)_1, \ldots, (f \circ g)_m) d(f \circ g)_I \\ &= \sum_I a_I(f_1(g_1, \ldots, g_n), \ldots, f_m(g_1, \ldots, g_n))\, df_I(dg_1, \ldots, dg_n) = g^*(f^*\omega). \end{aligned}$$