Vektoranalysis
Wintersemester 2016/2017

PD Dr. Peter Massopust
19. Januar 2017

Übungsblatt 6

1. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale C^α-Untermannigfaltigkeit mit $\alpha > 1$. Man zeige, dass das Tangentialbündel TM eine $2k$-dimensionale $C^{\alpha-1}$-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ist.

2. Seien $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\gamma_1(t) := \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ \sqrt{\frac{3}{4} + t - t^2} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \gamma_2(t) := \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{t(1-t)} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Sei $f \in \Gamma(\mathbb{R}^3)$ gegeben durch $f(x) := (x_3^2, 0, 2x_1x_3)^\top$. Man berechne

$$\int_{\gamma_i} f(x) \cdot dx, \quad i = 1, 2.$$

3. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit, die durch eine Parametrisierung $\Psi : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, beschrieben wird. Auf einer offenen Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ mit $M \subset V$ seien die skalare Funktion $f : V \to \mathbb{R}$ und das Vektorfeld $v \in \Gamma(V)$ gegeben.

Vorüberlegung: Die Ableitung $D\Psi$ bildet $T_xU = \mathbb{R}^k$ auf $T_{\Psi(x)}M$ ab (wieso?).

Definition (Pullback)**.**

(i) *Der Pullback $\Psi^* f : U \to \mathbb{R}$ von f unter Ψ ist definiert als*

$$(\Psi^* f)(x) := f(\Psi(x)), \quad \forall\, x \in U.$$

(ii) *Der Pullback $\Psi^* v : U \to T_xU$ von v unter Ψ ist definiert durch*

$$\Psi^* v(x) \cdot w := v(\Psi(x))^\top D\Psi(x) w, \quad \forall\, w \in T_xU.$$

Man zeige:

(a) $\Psi^* v(x) = D\Psi(x)^\top v(\Psi(x))$.

(b) $\Psi^* \nabla = \nabla \Psi^*$, d.h. der Pullback kommutiert mit dem Gradientenoperator.

(c) Sei $B_1(0) := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ und $\Psi : B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \sqrt{1 - (x_1^2 + x_2^2)} \end{pmatrix}.$$

Des Weiteren sei $M := \Psi(B_1(0))$.
Man bestimme den Pullback der folgenden Vektorfelder unter Ψ:

$$v(x) = x \quad \text{und} \quad w(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit C^1-Rand. Ferner seien $f, g \in C^2(U)$, wobei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge mit $\overline{\Omega} \subset U$ ist. Weiterhin sei $\partial_\nu g(x) = \nabla g(x) \cdot \nu(x)$ die Richtungsableitung von g in x in Richtung der äußeren Normalen ν an $\partial\Omega$. Dann gilt

(a) **Erste Greensche Formel**

$$\int_\Omega f \Delta g \, dx = -\int_\Omega \nabla f \cdot \nabla g \, dx + \int_{\partial\Omega} f \partial_\nu g \, dS,$$

(b) **Zweite Greensche Formel**

$$\int_\Omega \Delta g \, dx = \int_{\partial\Omega} \partial_\nu g \, dS.$$

(c) **Dritte Greensche Formel**

$$\int_\Omega \big(f\Delta g - g\Delta f\big) \, dx = \int_{\partial\Omega} \big(f\partial_\nu g - g\partial_\nu f\big) \, dS.$$

(d) Es seien $u_1, u_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit

$$\Delta u_1\big|_{B_1(0)} = \Delta u_2\big|_{B_1(0)} \quad \text{und} \quad u_1\big|_{\mathbb{S}^{n-1}} = u_2\big|_{\mathbb{S}^{n-1}}.$$

Dann gilt bereits $u_1 = u_2$ auf $B_1(0)$. *Hinweis:* Betrachten Sie die Funktion $u = u_1 - u_2$ und verwenden Sie Teil (a).

5. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in \Gamma(U)$ stetig differenzierbar. Man zeige, dass für $x \in U$ gilt:

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{\operatorname{vol}_n B_\varepsilon(x)} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} f(\xi) \cdot \nu(\xi) \, dS(\xi) = \operatorname{div} f.$$