Vektoranalysis
Wintersemester 2016/2017

PD Dr. Peter Massopust
22. Dezember 2016

Übungsblatt 5

1. Eine Orientierung auf M erzeugt auch eine Orientierung der Tangentialräume T_pM: Ist die Untermannigfaltigkeit M durch den Atlas $\mathcal{A}$ orientiert, so legt die Basis $\{\partial_1\Phi(a), \ldots, \partial_k\Phi(a)\}$, $a = \Phi^{-1}(p)$, eine Orientierung auf T_pM fest. Zeigen Sie, dass diese Orientierung unabhängig von der Wahl der Karte $\Phi \in \mathcal{A}$ ist.

2. Betrachte die Abbildung $\Psi : [0, 2\pi] \times [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^3$,
$$\Psi(u, v) = \begin{pmatrix} (1 + v\cos\frac{u}{2})\cos u \\ (1 + v\cos\frac{u}{2})\sin u \\ v\sin\frac{u}{2} \end{pmatrix}.$$
Das Bild $M = \Psi\big([0, 2\pi] \times [-\pi, \pi]\big)$ heisst *Möbiusband.* Zeigen Sie, dass M eine nicht orientierbare zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

3. Zeigen Sie, dass Folgendes gilt: Für beliebige $a, b \in \mathbb{R}^3$ ist $\det(a \times b, a, b) = |a \times b|^2$.

4. Sei $\psi : U \to M$ mit $U \subset \mathbb{R}^2$ offen eine Parametrisierung einer 2-dimensionalen Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass für alle $u \in U$ gilt
$$g(u) = |\partial_1\psi(u) \times \partial_2\psi(u)|^2$$

5. Man zeige, dass die obere Halbebene $H_+ := \{x = (x_1, \ldots, x_k) : x_k \geq 0\}$ des $\mathbb{R}^k$ einen glatten Rand besitzt. Man gebe auch ein stetiges äußeres Normalenfeld an.