Vektoranalysis
Wintersemester 2016/2017

PD Dr. Peter Massopust
M.Sc. Andreas Bluhm

Übungsblatt 4 - Lösungsvorschläge

1. Es sei $I := (0, 6\pi)$ und $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $\gamma(t) := (\cos t, \sin t, t)$. Setze $M := \gamma(I)$. Berechnen Sie die Integrale

$$(a) \quad \int_M dx \qquad \text{und} \qquad (b) \quad \int_M yz^2\, dx.$$

Lösung:

(a) Zu zeigen ist, dass γ eine C^1-Kurve mit $\dot{\gamma} \neq 0$ auf I ist, sowie dass γ ein Homöomorphismus $I \to \gamma(I) = M$ ist.

Dass γ eine C^1-Kurve mit $\dot{\gamma} \neq 0$ auf I ist, ist klar; ebenso die Bijektivität von $\gamma : I \to \gamma(I)$.

Die Umkehrabbildung ist gegeben durch $\gamma^{-1}(x_1, x_2, x_3) = x_3$ und das ist offenbar eine stetige Funktion.

Damit ist M eine eindimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$.

Die Ableitung $D\gamma$ von γ und die Gramsche Determinante g sind gegeben durch:

$$D\gamma(t) = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(t) \\ \dot{\gamma}_2(t) \\ \dot{\gamma}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie

$$g(t) = \det\big(D\gamma(t)^\top D\gamma(t)\big) = \dot{\gamma}_1(t)^2 + \dot{\gamma}_2(t)^2 + \dot{\gamma}_3(t)^2 = 2$$

Damit ist

$$\int_M dx = \int_{(0,6\pi)} \sqrt{g(t)}\, dt = \int_0^{6\pi} \sqrt{2}\, dt = 6\pi\sqrt{2}.$$

(b) Mit den Überlegungen aus dem ersten Aufgabenteil folgt hier

$$\int_M f\, dx = \int_I f(\gamma(t))\sqrt{g(t)}\, dt = \int_0^{6\pi} t^2 \sin(t)\sqrt{2}\, dt$$

Dieses Integral kann mittels zweimaliger partieller Integration berechnet werden:

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\int_{(0,6\pi)} t^2\sin(t)\, dt &= -\sqrt{2}t^2\cos(t)\Big|_0^{6\pi} + 2\sqrt{2}\int_{(0,6\pi)} t\cos(t)\, dt \\ &= -36\pi^2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}t\sin(t)\Big|_0^{6\pi} - 2\sqrt{2}\int_{(0,6\pi)} \sin(t)\, dt = -36\pi^2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

2. Betrachte die Gleichung $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$. Diese Gleichung besitzt beispielsweise die Lösungen $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$, $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$ und $(\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$. Setze $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$.

(a) Ist $M' = M \setminus \{(0, 0)\}$ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$?

(b) Geben Sie eine Parametrisierung von M' in der Umgebung von $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ an.

(c) Geben Sie den Normalenraum um den Punkt $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ an.

Lösung:

(a) Die Menge M ist bereits als Nullstellenmenge der (beliebig oft) differenzierbaren Funktion $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ auf der offenen Menge $U = \mathbb{R}^2$ gegeben.
Es ist $Df(x,y) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x)$, und damit

$$Df(x,y) = 0 \iff x^2 = y \quad \text{und} \quad y^2 = x.$$

Es ergibt sich die Bedingung $x = x^4$, mit den reellen Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$. Die zugehörigen y-Koordinaten sind $y_1 = 0$ und $y_2 = 1$.
Der Punkt $(1,1)$ liegt wegen $f(1,1) = -1$ nicht in M; hingegen ist $(0,0) \in M$. Damit ist $M' = M \setminus \{(0,0)\}$ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$.

(b) Benutze den Satz über implizite Funktionen. Wegen $Df(p) \neq 0$ für jedes $p \in M'$ gibt es lokal eine Funktion $y = g(x)$ mit $f(x, g(x)) = 0$. Wegen $Df(p) = (1,1)$ für $p = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ kann man hier wahlweise nach x oder y auflösen. Mit Hilfe der Funktion g lässt sich nun aber eine Parametrisierung besonders einfach angeben: Die Funktion $\psi(t) = \begin{pmatrix} t \\ g(t) \end{pmatrix}$ erfüllt offenbar alle erforderlichen Bedingung (injektiv, surjektiv, stetig, mit stetiger Umkehrfunktion $\psi^{-1}(x,y) = x$).
Für die konkrete Bestimmung der Funktion g kann man beispielsweise erneut den Satz über implizite Funktionen benutzen. Dieser liefert auch einen Ausdruck für die Ableitung von g. Es gilt

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{x^2 - y}{y^2 - x}.$$

Indem man auf der rechten Seite wieder $y = g(x)$ einsetzt, erhält man auf diese Weise eine Differentialgleichung erster Ordnung zur Bestimmung von g, mit Anfangsbedingung $\frac{3}{2} = g(\frac{3}{2})$ (gemäß Wahl der Umgebungen um p). Alternativ kann man natürlich direkt versuchen, die Gleichung $f(x,y) = 0$ nach x oder y umzustellen, aber auch dies ist als Polynomgleichung dritten Grades nur mit Schwierigkeiten möglich.
Es ergibt sich dann die Funktion

$$g(x) = \frac{2^{2/3}x + (-x^3 + \sqrt{x^6 - 4x^3})^{2/3}}{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{-x^3 + \sqrt{x^6 - 4x^3}}}, \quad x \in (0, 2^{2/3}).$$

(c) Erinnerung: Für $M \cap U = \{x \in U : f(x) = 0\}$ mit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ kann der Normalenraum beschrieben werden als $N_pM = \operatorname{span}\{\partial_1 f(p), \ldots, \partial_{n-k} f(p)\}$.
Hier ist $N_pM' = \operatorname{span}\{\nabla f(p)\} = \operatorname{span}\{(3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x)^\top\}$. Für $p = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ ergibt sich $N_pM' = \operatorname{span}\{(1,1)^\top\}$.

3. Man berechne das Volumen des Vivianischen Körpers

$$K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \wedge x^2 + y^2 \leq 2x\}.$$

Lösung: Benutze die Symmetrie des Vivianischen Körpers: K ist symmetrisch in Bezug auf die $x - y$-Ebene ($z \mapsto -z$) und auch in Bezug auf die x-Achse ($y \mapsto -y$).

Integriere über $z = f(x,y) := (4 - x^2 - y^2)^{1/2}$ über den Bereich des Zylinders $x^2 + y^2 \leq 2x$ und ignoriere Mengen vom Maß null:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}_3(K) &= \int_K 1 \, dx = 4 \int_{K \cap \{x,y,z > 0\}} 1 \, dx = \int_{\{x^2+y^2 \leq 2x\} \cap \{x,y > 0\}} f(x,y) dx dy \\
&= 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\cos\phi} \sqrt{4 - r^2} \; r dr d\phi = 4 \int_0^{\pi/2} \left[-\tfrac{1}{3}(4 - r^2)^{3/2} \right]_0^{2\cos\phi} d\phi \\
&= -\tfrac{4}{3} \int_0^{\pi/2} \left[(4 - 4\cos^2\phi)^{3/2} - 8 \right] d\phi = -\tfrac{32}{3} \int_0^{\pi/2} (\sin^3\phi - 1) d\phi \\
&= \tfrac{16}{9}(3\pi - 4).
\end{aligned}$$

4. Gravitationspotential im Inneren einer Kugelschale. Gegeben sei die homogene Kugelschale K der Dichte 1 mit Radius 1 und Dicke $0 < d < 1$:

$$K = \{x \in \mathbb{R}^3 : 1 - d \leq |x| \leq 1\}.$$

Man berechne das Gravitationspotential

$$\Phi(x) = -\gamma \int_K \frac{1}{|x - x'|} \, dx'$$

im Inneren, d.h. für $|x| < 1 - d$ (γ bezeichnet die Gravitationskonstante).

Lösung: Wegen Symmetrie kann man o.B.d.A. annehmen, dass $x = (0, 0, p)^\top$ ist mit $0 \leq p \leq 1 - d$. Mithilfe von Kugelkoordinaten (innere Karte!)

$$\Psi(r, \theta, \phi) = x' = \begin{pmatrix} r\cos\phi\sin\theta \\ r\sin\phi\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix}, \quad (r, \phi, \theta) \in T := [1 - d, 1] \times [0, 2\pi) \times (0, \pi),$$

ergibt sich damit, unter Berücksichtigung, dass $K \setminus \Psi(T)$ eine Nullmenge ist,

$$\begin{aligned}
\Phi(x) &= -\gamma \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_{1-d}^{1} \frac{r^2 \sin\theta}{\sqrt{r^2 + p^2 - 2pr\cos\theta}} dr \, d\theta \, d\phi \\
&= -\gamma \int_0^{2\pi} \int_{1-d}^{1} \int_{-1}^{1} \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + p^2 - 2prt}} dt \, dr \, d\phi \\
&= -2\pi\gamma \int_{1-d}^{1} \frac{r^2}{pr} \left[\sqrt{r^2 + p^2 - 2prt}\right]_{-1}^{1} dr \\
&= -2\pi\gamma \int_{1-d}^{1} \frac{r}{p} \, (-2p) \, dr = 2\pi\gamma d(2 - d).
\end{aligned}$$

Im Inneren der Kugelschale ist das Gravitationspotential also konstant.

N.B. Hier wurde der Satz von Fubini benutzt sowie die Tatsache, dass Nullmengen für die Integration keine Rolle spielen.