Vektoranalysis
Wintersemester 2016/2017

PD Dr. Peter Massopust
M.Sc. Andreas Bluhm

Übungsblatt 2 - Lösungsvorschläge

1. Es sei $A \in \mathbb{R}^{k\times k}_{\text{sym}}$ eine von der Nullmatrix verschiedene Matrix. Definiere $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ als $f(x) := x^\top Ax$. Man bestimme alle regulären Werte c von f und damit jene Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^k$ die sich als Urbilder $f^{-1}(\{c\})$ ergeben.

   Lösung: Es ist $Df(x)\xi = 2x^\top A\xi$ für $x, \xi \in \mathbb{R}^k$. Daher ist die lineare Abbildung $Df(x) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ surjektiv genau dann, wenn $Ax \neq 0$ ist. Damit ist $c = 0$ der einzige nichtreguläre Wert von f. Daraus folgt, dass für $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die Menge

   $$M := f^{-1}(\{c\}) = \left\{x \in \mathbb{R}^k : x^\top Ax = c\right\}$$

   eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $k - 1$ des $\mathbb{R}^k$ ist.

2. Es sei ein Kreis $\mathcal{K}$ in der (x, z)-Ebene um den Punkt $(r_1, 0)$ mit Radius r_2 mit $0 < r_2 < r_1$ gegeben. Es bezeichne $\mathbb{T}^2$ die Menge aller Punkte im $\mathbb{R}^3$, die bei der Drehung von $\mathcal{K}$ um die z-Achse entstehen. $\mathbb{T}^2$ heisst *Rotationstorus*.

   (a) Durch Einführung geeigneter Polarkoordinaten zeige man, dass sich $\mathbb{T}^2$ beschreiben lässt als

   $$\mathbb{T}^2 = \{((r_1 + r_2 \cos v)\cos u, (r_1 + r_2 \cos v)\sin u, r_2 \sin v) : u, v \in \mathbb{R}\}.$$

   Lösung: Polarkoordinaten für $\mathcal{K}$: (r_2, v) und Polarkoordinaten für die Projektion des Torus auf die xy-Ebene: $(r_1 + r_2 \cos v, u)$.

   (b) Man zeige, dass $\mathbb{T}^2$ eine zweidimensional Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

   Lösung: Es ist

   $$x = (r_1 + r_2 \cos v)\cos u, \quad y = (r_1 + r_2 \cos v)\sin u, \quad z = r_2 \sin v.$$

   Daraus ergibt sich

   $$x^2 + y^2 = (r_1 + r_2 \cos v)^2$$

   und somit

   $$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - r_1\right)^2 = r_2^2 \cos^2 v = r_2^2(1 - \sin^2 v) = r_2^2 - z^2.$$

   Also,

   $$\mathbb{T}^2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\sqrt{x^2 + y^2} - r_1\right)^2 + z^2 - r_2^2 = 0\right\}.$$

   Definiere eine Abbildung

   $$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
   $$(x, y, z) \mapsto \left(\sqrt{x^2 + y^2} - r_1\right)^2 + z^2 - r_2^2.$$

   Dann gilt: $\mathbb{T}^2 = f^{-1}(\{0\})$. Für die Ableitung Df ergibt sich:

   $$Df(x, y, z) = \left(\frac{2x(\sqrt{x^2 + y^2} - r_1)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{2y(\sqrt{x^2 + y^2} - r_1)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 2z\right) \neq 0, \quad \forall\ (x, y, z) \in \mathbb{T}^2.$$

   Nach dem Satz von Regulären Wert ist $\mathbb{T}^2$ eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$.

3. Es sei $\mathbb{S}_r^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = r\}$ die n-dimensionale Sphäre im $\mathbb{R}^{n+1}$ und $p \in \mathbb{S}_r^n$. Man zeige, dass

$$T_p\mathbb{S}_r^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle\, p,\, v\rangle = 0\}$$

ist, wobei $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ das kanonische innere Produkt im $\mathbb{R}^{n+1}$ bezeichnet.

Lösung: Es sei $p \in \mathbb{S}_r^n$ und U eine nichtleere offene Umgebung von p. Es sei $v \in T_p\mathbb{S}_r^n$. Dann $\exists$ eine glatte Kurve $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{S}_r^n$ mit $\gamma(0) = p$ und $\dot\gamma(0) = v$. Für klein genug gewähltes t liegt dann $\gamma(t) \in U$ und es gilt $\langle\, \gamma(t),\, \gamma(t)\rangle = r^2$, $\forall\ t \in U$.

$$\frac{d}{dt}\langle\, \gamma(t),\, \gamma(t)\rangle = 2\langle\, \gamma(t),\, \dot\gamma(t)\rangle = 0.$$

Für $t = 0$ ergibt sich aus obiger Gleichung $\langle\, p,\, v\rangle = 0$, also $T_p\mathbb{S}_r^n \subseteq \{v \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle\, p,\, v\rangle = 0\}$. Aus $\dim T_p\mathbb{S}_r^n = n = \dim\{v \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle\, p,\, v\rangle = 0\}$ ergibt sich die Behauptung.

4. Es sei $A \in \mathbb{R}^{k\times k}_{\text{sym}}$ eine von der Nullmatrix verschiedene Matrix und $c \neq 0$. Man bestimme den Tangentialraum T_pM zur Mannigfaltigkeit

$$M := \left\{x \in \mathbb{R}^k : x^\top Ax = c\right\}$$

im Punkt $p \in M$. Was ist die Dimension von T_pM?

Lösung: Man benutze die Charakterisierung des Tangentialraums gegeben in Satz 2.9 (iii). Damit ist:

$$T_pM = \operatorname{Kern} Df(p) = \operatorname{Kern} p^\top A = \left\{\xi \in \mathbb{R}^k : p^\top A\xi = 0\right\}.$$

Daher: $\dim T_pM = k - 1$.

5. Man zeige, dass jede Mannigfaltigkeit einen abzählbaren Atlas besitzt.

Lösung: Da die Karten in einem Atlas die Mannigfaltigkeit M überdecken und da jede Mannigfaltigkeit das zweite Abzählbarkeitsaxiom (Existenz einer abzählbaren Basis der Topologie) erfüllt, genügt es zu zeigen, dass jede offene Überdeckung von M eine abzählbare Überdeckung enthält. Dies erhält man wie folgt: Es sei $\{Q_n\}$ eine abzählbare Basis der Topologie und $\{U_\lambda\}_{\in\Lambda}$ eine offene Überdeckung von M. Jedes U_λ ist - bei Definition von Basis - Vereinigung derjenigen Basismengen, die in U_λ liegen. Sei nun $\{Q_{n_k}\}$ eine Teilfolge derjenigen Basismengen, die in mindestens einem U_λ enthalten sind. Dann ist $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} Q_{n_k} = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = M$. Nun ordne jedem Q_{n_k} eine Menge U_λ, etwa U_{λ_k} zu, die Q_{n_k} umfasst. Dann ist auch $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} U_{\lambda_k} = M$.

6. Zeige, dass eine Menge $K \subset M \subset \mathbb{R}^n$ kompakt relativ zu M ist, genau dann wenn K kompakt in $\mathbb{R}^n$ ist.

Lösung:

" $\Rightarrow$ ": Es sei $U_i \subset \mathbb{R}^n$, $i \in I$, eine Familie offener Mengen bzgl. $\mathbb{R}^n$ mit $\bigcup\limits_{i\in I} U_i \supset K$. Da $K = K \cap M \subset \bigcup\limits_{i\in I} U_i \cap M$ ist, und $\{U_i \cap M\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von K in M, $\exists$ $J \subset I$, J endlich, mit $K \subset \bigcup\limits_{i\in J} U_i \cap M \subset \bigcup\limits_{i\in J} U_i$.

" $\Leftarrow$ ": Sei $V_i \subset M$, $i \in I$, eine Familie offener Mengen bzgl. M mit $\bigcup\limits_{i\in I} V_i \supset K$. Dann $\exists$ $U_i \in \mathbb{R}^n$ mit $V_i = U_i \cap M$, $\forall\ i \in I$. Daher ist $K \subset \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ und bei der Kompaktheit von K im $\mathbb{R}^n$, existiert ein $J \subset I$, J endlich, mit $K \subset \bigcup\limits_{i\in J} U_i$ und daher $K \subset \bigcup\limits_{i\in J} V_i$.

7. Man zeige, dass jede kompakte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ einen endlichen Atlas besitzt.

   Lösung: Benutze Aufgabe 6. Es sei $\{\Phi_j : V_j \subset \mathbb{R}^k \to U_j \subset M\}_{j\in I}$ ein Atlas von M. Dann ist aber $M = \bigcup\limits_{j\in I} U_j$ eine offene Überdeckung von M. Da M kompakt ist, $\exists$ eine endliche Teilüberdeckung, also endlich viele Karten $\{\Phi_j : V_j \subset \mathbb{R}^k \to U_j \subset M\}_{j=1}^N$ mit $M = \bigcup\limits_{j=1}^N U_j$.