Vektoranalysis
Wintersemester 2016/2017

PD Dr. Peter Massopust
27. Oktober 2016

Übungsblatt1

1. Zeige, dass $\mathbb{R}$ versehen mit

$$\mathcal{T}_{\mathbb{R}} := \{O \subseteq \mathbb{R} : \forall\, x \in O\, \exists \,\text{offenes Intervall } I \text{ mit } x \in I \subseteq O.\}$$

ein topologischer Raum wird.

2. Es sei $(M, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und N eine Untermenge von M.

   (a) Zeige, dass durch
$$\mathcal{T}_N := \{O \cap N : O \in \mathcal{T}\}$$
   eine Topologie, die sogenannte *Relativ-* oder *Spurtopologie*, auf N gegeben ist.

   (b) Eine Menge $A \subseteq N$ heisst *abgeschlossen in* $(N, \mathcal{T}_N)$ wenn $N \setminus A \in \mathcal{T}_N$. Zeige, dass $A \subseteq N$ abgeschlossen in $(N, \mathcal{T}_N)$ genau dann ist, wenn eine abgeschlossene Menge $A' \subseteq M$ existiert mit $A = A' \cap N$.

   (c) Man zeige, dass für $M := \mathbb{R}$ und $\mathcal{T} := \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$, die Untermenge $N := [0, 1) \subset \mathbb{R}$ weder offen noch abgeschlossen in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ ist, aber bezüglich der Spurtopologie $\mathcal{T}_N$ auf N sowohl offen als auch abgeschlossen ist.

3. Es sei $(M, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ heisst *Basis* von $\mathcal{T}$, wenn gilt

$$O \in \mathcal{T} \quad\Longrightarrow\quad O = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B, \qquad \text{wobei } \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}.$$

Man finde eine Basis für $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$.

4. Es sei I eine offenes Intervall und $r : I \to \mathbb{R}^+$ eine stetig differenzierbare Funktion. Zeige, dass
$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = (r(z))^2, z \in I\}$$
eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.